现代数学译丛

具非负特征形式的二阶微分方程

现代数学译丛

具非负特征形式的二阶微分方程

〔苏〕O. A. 奥列尼克　E. B. 拉德克维奇 著

辜联崑 等 译

周毓麟 校

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书着重介绍了偏微分方程理论的一个新分支——具非负特征形式的二阶微分方程理论．主要讨论边值问题解的存在性、唯一性和光滑性，二阶方程的亚椭圆性和弱解的局部光滑性以及解的定性性质．总结了七十年代以前的研究成果，是关于偏微分方程理论中一个新的重要研究课题的专著．

本书可供数学工作者、高等院校有关专业教师、高年级大学生和研究生参考．

O. A. Oleĭnik E. V. Radkevič
Second order equations with nonnegative characteristic form
American Mathematical Society, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973

现代数学译丛

具非负特征形式的二阶微分方程

〔苏〕O. A. 奥列尼克 E. B. 拉德克维奇 著
辛联昆 等 译
周毓麟 校
责任编辑 苏芳霞

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年7月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1986年7月第一次印刷 印张：9 1/8
印数：0001—4,300 字数：242,000

统一书号：13031・3217
本社书号：4976・13—1

定价： 2.60 元

译 者 的 话

本书是按照1973年英译本翻译的，英译本较俄文原版内容有所增加。俄文原版为 О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Уравнения второго порядка с неотрицательной характери-стической формой”于1971年出版。

由于时间匆促，译者水平有限，因此译文必定有不妥之处，敬请读者批评指正。

参加翻译的有辜联崑、张克农、庄琼珊、洪乃端、郑宝琚、许清泉、蔡晖等同志。

目　　录

引言 …… 1
第一章　第一边值问题 …… 15
§1. 符号. 辅助结果. 第一边值问题的阐述 …… 15
§2. 在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间的先验估计 …… 22
§3. 在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间第一边值问题解的存在性 …… 26
§4. 在 Hilbert 空间第一边值问题的弱解的存在性 …… 28
§5. 用椭圆正则化方法求第一边值问题的解 …… 31
§6. 第一边值问题弱解的唯一性定理 …… 44
§7. 关于非负二次形式的一个引理 …… 70
§8. 第一边值问题弱解的光滑性. 存在有界导数解的条件 …… 72
§9. 在 С. Л. Соболев 空间第一边值问题解的存在条件 …… 115
第二章　二阶微分方程的弱解的局部光滑性和亚椭圆性 …… 129
§1. $\mathscr{H}_s$ 空间 …… 129
§2. 拟微分算子的一些性质 …… 141
§3. 亚椭圆性的一个必要条件 …… 156
§4. 微分算子的弱解局部光滑性的充分条件和亚椭圆性 …… 159
§5. Hörmander 算子的先验估计和亚椭圆性定理 …… 176
§6. 一般二阶微分方程的先验估计和亚椭圆性定理 …… 199
§7. 在非光滑区域第一边值问题的解. М. В. Келдыш 方法 …… 217
§8. 具解析系数二阶偏微分算子的亚椭圆性 …… 223
第三章　附加的论题 …… 233
§1. 具非负特征形式的二阶方程解的定性性质 …… 233
§2. 退化二阶双曲型方程的 Cauchy 问题 …… 245
§3. 二阶方程 Cauchy 问题适定性的必要条件 …… 264
参考文献 …… 279

引　　言

具非负特征形式的二阶方程构成了偏微分方程理论的一个新分支．它在过去的二十年中已经出现，近年来又得到了十分迅速的发展．

形式为

$$L(u) \equiv a^{kj}(x)u_{x_kx_j} + b^k(x)u_{x_k} + c(x)u = f(x) \qquad (1)$$

的方程，如果在 G 的每一点 x 上，对于任意的向量

$$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m),$$

有 $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqslant 0$，则说它在集合 G 上是具非负特征形式的二阶方程．在方程 (1) 中，规定重复指标表示从 1 到 m 求和，而

$$x = (x_1, \cdots, x_m).$$

这种方程有时也称为退化椭圆型方程或椭圆-抛物型方程．

这类方程包含椭圆型和抛物型方程，一阶方程，超抛物型方程，Brown 运动方程等等．

现在已经建立了具非负特征形式的二阶方程一般理论的基础，本书的目的在于介绍这些基础．

很早以前，特别在大约 60 年前发表的 Picone[105] 的论文中，就研究过与已深入研究的椭圆型或抛物型方程不相同的、形式为 (1) 的特殊类型方程．

Tricomi 的研究报告[131]以及后来的混合型方程的研究，引起了更一般地研究在区域边界退化的椭圆型方程的兴趣，即研究具有如下条件的形式为 (1) 的方程：在区域 Ω 的点上当 $\xi \neq 0$ 时 $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j > 0$，而在区域边界的点上对于一切的 ξ，有

$$a^{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqslant 0.$$

M. B. Келдыш 在 1951 年 的论文[63]，开创了一系列的工作，在此理论的发展中起了重大的作用．正是 Келдыш 的这篇论文，

首先揭示了这样的事实：对于在边界退化的椭圆型方程的情况，在一定假设下，部分边界可以不受边界条件的限制．继 Келдыш 论文后的许多工作都深入研究了在边界退化的任意阶椭圆型方程的边值问题．在这些研究工作中使用了各种方法，这些方法以前在椭圆型方程理论和偏微分方程理论的其它分支中曾经应用过(在 [123] 中可以找到这些文章的一些概述)．联系泛函分析方法研究在边界退化的椭圆型方程，就出现带加权赋范函数空间理论，对于这个空间获得类似于 С. Л. Соболев 的嵌入定理(参看 [71, 84, 133] 等等)．最近研究了在区域内部的子流形上或在它的边界上退化的拟微分方程（这些是 [24, 77, 78, 134—136] 等论文所讨论的)．拟微分方程理论的方法，在很多情况下，对于在边界退化的椭圆型方程几乎导致决定性的结果．特别对研究古典的 Poincaré 斜导数问题导致了重要的进展(参看 [24, 77, 78])．

我们将研究形式 (1) 的一般方程，它在特征形式 $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j$ 对于任意 $\xi\neq 0$ 可能为 0 的 x 点集上不加任何限制．本书所发展的理论，特别包含了在边界上退化的二阶椭圆型方程的成果．

1956 年 Fichera 发表的论文[29]，对发展具非负特征形式二阶方程的一般理论是一个重要的步骤．在那篇论文中，对于具非负特征形式的一般二阶方程，提出了类似于椭圆型方程的 Dirichlet 和 Neumann 问题的边值问题．在边界为 Σ 的区域 Ω 中，方程 (1) 的第一边值问题(或 Dirichlet 问题) 表述如下：求函数 $u(x)$，使得

$$L(u)=f, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \tag{2}$$

和

$$u=g, \text{ 在 } \Sigma_2\cup\Sigma_3 \text{ 上} \tag{3}$$

这里 f 和 g 是相应地定义在 Ω 和 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上的函数，后者是 Σ 的子集，将在下面定义．将区域 Ω 的整个边界 Σ 分划为集合 Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3. 设 $\bar{n}=(n_1, \cdots, n_m)$ 是边界 Σ 的内法向量．我们用 Σ_3 记边界 Σ 的非特征部分，即 Σ_3 是 Σ 上适合 $a^{kj}n_kn_j>0$ 的点集．在 $a^{kj}n_kn_j=0$ 的集合 $\Sigma\setminus\Sigma_3$ 上检验 Fichera 函数 $b\equiv(b^k-a^{kj}_{x_j})n_k$.

用 Σ_0, Σ_1, Σ_2 表示 $\Sigma\backslash\Sigma_3$ 的子集,那里相应的 $b=0$, $b>0$ 和 $b<0$. (仅在边界 Σ 退化的椭圆型方程的情况, 问题(2), (3)与[63]的 M. B. Келдыш 问题恰好相合.)

我们注意到边界 Σ 分划为 Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 部分,关于自变量变换是不变的.

对于问题(2),(3)产生如下的问题: 方程的系数和区域的边界满足什么条件, 问题(2),(3)的解才存在、唯一,并且具有一定阶数的光滑性?(简单的例子表明, 问题(2), (3)可能没有光滑解(参看第一章 § 8).)

从 Fichera 的论文[29,30]中得到在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间问题(2), (3)的光滑解的一个先验估计. 特别证明了: 如果在 $\Omega\cup\Sigma$ 中, $c<0$ 并且 $c^*<0$, 则对于所有在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上满足条件 $u=0$ 的 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类函数 u 和所有的 $p\geqslant 1$, 估计

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant\frac{p}{\min[-c^*+(1-p)c]}\|L(u)\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \tag{4}$$

成立, 这里 $c^*=a^{kj}_{x_kx_j}-b^k_{x_k}+c$. 我们用 $C^{(k)}(\Omega\cup\Sigma)$ 表示这样的函数类: 它的直至 k 阶的导数在 $\Omega\cup\Sigma$ 上连续(参看第一章 §2).

利用估计(4)和 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间线性泛函的表示定理, Fichera 获得了问题(2),(3)在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间弱解的存在定理.

对于 $g=0$, 问题(2),(3)的弱解定义为空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的函数 $u(x)$, 它对于在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于0的任意 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类函数 $v(x)$, 满足积分恒等式

$$\int_\Omega uL^*(v)dx=\int_\Omega vfdx \tag{5}$$

这里

$$L^*(v)\equiv a^{kj}v_{x_kx_j}+b^{*k}v_{x_k}+c^*v,$$
$$b^{*k}\equiv 2a^{kj}_{x_j}-b^k$$

(参看第一章 § 3).

Fichera 也证明了: 在具内积

$$(u, v)_{\mathscr{H}} = \int_{\Omega}(a^{kj}u_{x_k x_j}v_{x_j} + uv)dx + \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}|b|uvds$$

的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中，问题(2),(3)的解的存在性。其证明基于 Riesz 表示定理。

用椭圆正则化方法可以证明在 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的函数类或有界函数类中，(2),(3)的弱解的存在定理(参看[91, 93]和第一章§5)。在这个方法中，对于光滑的 f 和 g，问题(2),(3)的弱解是由椭圆型方程

$$\varepsilon\Delta u + L(u) = f \ (\text{在}\ \Omega\ \text{内}),\ \varepsilon = \text{const} > 0 \tag{6}$$

及边界条件

$$u = g_1, \quad \text{在}\ \Sigma\ \text{上} \tag{7}$$

的 Dirichlet 问题的解对 $\varepsilon \to 0$ 取极限而得到的，其中 g_1 是在 $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 上与 g 重合的光滑函数。为了证明(6),(7)的解当 $\varepsilon \to 0$ 时存在极限，需要建立这些解在适当空间的范数的一致估计(关于 ε)以及在区域边界上的导数的估计。

在 Fichera 的论文中，提出了问题(2)和(3)在空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 和 $\mathscr{H}$ 的弱解的唯一性问题。

(2),(3)的弱解的唯一性问题最早在[91]研究过(也可参看[93]和第一章§6)。这种广义解的唯一性定理，是用椭圆正则化方法证明的。在方程(2)的系数和区域 Ω 的边界广泛假定下，证明了在(5)的意义下的弱解在 $\mathscr{L}_p(\Omega)(p \geqslant 3)$ 的函数类中是唯一的。在这个结果中，假设了集合 Σ_2 在 Σ 中的边界 Γ 是具有 $(m-1)$ 维零测度的。

在第一章§6中，给出问题(2),(3)的一些例子，它们满足 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 函数类 $(p \geqslant 3)$ 弱解的唯一性定理的全部假定，但是在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ $(p < 3)$ 函数类中，唯一性却不成立。这些例子表明第一章§6关于弱解唯一性的基本定理在某种意义下是尽可能好的结果。

Phillips 和 Sarason[102] 给出问题(2),(3)的一个例子，其中 Γ 具有正的 $(m-1)$ 维测度，甚至在有界可测函数类中，问题的弱

解不是唯一的.

他们在 [102] 中将 (2) 化为对称方程组并且应用对称算子的延拓理论，证明了在空间 $\mathscr{H}$ 中,问题 (2), (3) 弱解的唯一性定理. 在第一章 § 6 中证明了类似的定理. 后面这个定理,对弱解的要求比在空间 $\mathscr{H}$ 存在有限范数更弱. 但要求 (2) 的最高阶导数的系数可以连续延拓到 Σ_2 的一个邻域,并且保持特征形式的非负性,还要求具有有界的二阶导数. 在这个定理中,系数可以连续延拓的条件可以换成要求弱解在 Σ_2 上在某种弱意义下取给定值.

对于分片光滑区域也建立了 (2), (3) 的解的唯一性定理.

在 A. M. Ильин 的学位论文中，研究了一类特殊的具非负特征形式的二阶方程 (2), (3) 的光滑解的存在性问题(参看 [57, 58, 59]). 他发现在这类方程中,为了使 (2), (3) 的光滑解存在,(2) 的系数及其导数必须满足某些不等式.

在 [92, 93] 中给出了 (2), (3) 存在光滑解的广泛充分条件. 这些文章还证明了这个问题弱解的光滑性定理. 这些定理的证明基于如下的引理(参看 [93], 也可以参看第一章 § 7).

假定对于 R^m 的一切 x 和 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$, $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j\geqslant 0$, 还假定 $a^{kj}(x)$ 属于 $C_{(2)}(R^m)$ 类. 那么每个函数 $v\in C_{(2)}(R^m)$ 且满足不等式

$$(a^{kj}_{x_p}v_{x_kx_j})^2\leqslant Ma^{kj}v_{x_kx_s}v_{x_jx_s} \tag{8}$$

其中,常数M仅仅依赖于 a^{kj} 的二阶导数. 我们用 $C_{(k)}(\Omega)$ 表示这样的函数类: 它及其直至 k 阶导数在 Ω 内有界. 这个引理对于研究方程 (1) 的弱解的局部光滑性同样具有重大的应用价值 (参看第二章 § 6).

作为例子, (2), (3) 在 $C_{(s)}(\Omega)$ 类中存在解的一个充分条件为: 方程的系数和函数 f 属于 $C_{(s)}(\Omega)$ 类, 区域 Ω 的边界充分光滑,不等式 $c\leqslant -c_0<0$ 成立(这里 c_0 是依赖于 s 的数),并且系数a^{kj} 可以连续延拓到 $\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 的邻域,在该邻域中, a^{kj} 属于 $C_{(s)}$ 类且特征形式 $a^{kj}\xi_k\xi_j$ 非负. 此外,假设集合 Σ_3,Σ_2 和 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 没有公共点(参看 [92, 93, 147]). 在 Kohn 和 Nirenberg 的论

文[64]中，研究了(2)，(3)光滑解的存在问题（没有假定系数 a^{kj} 可以经过边界连续延拓而具有上面指出的性质）（参看第一章§9）．他们获得(2)和(3)在 Соболев 空间 $W_2^N(\Omega)$ 存在解的条件．在这些结果中，假设 $\overline{\Sigma_0\cup\Sigma_1}$ 和 $\overline{\Sigma_2\cup\Sigma_3}$ 的交集是空的，在 Ω 内系数 $c\leqslant -c_0<0$，并且在 Σ_2 上，$b\leqslant -b_0<0$，这里，常数 c_0 和 b_0 是充分大的．为了简单起见，假设方程(2)的系数，Ω 的边界和函数 f 及 g 都是无穷次可微的．在谈到的这篇文章中，用椭圆正则化方法同样获得了(2)，(3)的解．因此在 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 的邻域中，(2)的左端增加一个乘以 ε 的椭圆算子，其阶数依赖于 N，而对 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 在 Ω 内的一个邻域外，增加一个乘以 ε 的二阶椭圆算子．在空间 $W_2^N(\Omega)$ 中，建立这个椭圆型方程相应问题的解关于参数 ε 的一致的先验估计．在第一章§8，我们用其它方法也获得了类似的定理．在那里我们给出问题(2)，(3)的解属于 $C_{(k)}(\Omega)$ 的条件，其中系数 a^{kj} 不能经过边界连续延拓而具有上面指出的性质．对这种情况，证明(2)，(3)的解可以用增加一个带小参数 ε 的二阶椭圆算子将(2)正则化而获得．我们注意：Lions 已经广泛应用椭圆和抛物正则化的方法（例如参看[75]），同样在非线性双曲型方程间断解的研究中，这种方法也广泛地被应用（参看[96]消失粘性法）．类似于椭圆型方程的 Neumann 问题，在[27，110]中研究了(1)的第二边值问题．

研究(2)，(3)解的局部光滑性及与此有关的二阶方程的亚椭圆性问题是具有重大的意义的．算子的亚椭圆性概念是在 Schwartz 的书[120]中引入的（也可参阅[50，51]）．

定义在区域 Ω 内系数无穷次可微的线性微分算子 P，如果对于 $D'(\Omega)$ 内的任意广义函数 $u(x)$ 和包含在 Ω 内的任意区域 Ω_1，由 Pu 在 Ω_1 内无穷次可微的条件可以推出 $u(x)$ 在 Ω_1 内也是无穷次可微的，则算子 P 在 Ω 内是亚椭圆算子．

对于常系数方程和方程组，其亚椭圆性的充分必要条件已经在[50，51]中获得．对于变系数方程和方程组以及对于拟微分算子，也找到了亚椭圆性的各种充分条件．

L. Hörmander 在[55]中证明了：二阶亚椭圆方程在Ω的每一个点上有非负特征形式（可能乘以-1后）（也可参看第二章§3）.

在[55]中，Hörmander 给出形式为

$$Pu = -\sum_{j=1}^{r} X_j^2 u + iX_0 u + cu = f \tag{9}$$

的二阶方程亚椭圆性的一个充分条件，其中 $X_j (j = 0, 1, \cdots, r)$ 是具有无穷次可微实系数的一阶算子

$$X_j = \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x) D_k;$$

$$D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

对算子(9)，Hörmander 的条件是关于算子 $X_j (j = 0, 1, \cdots, r)$ 的李代数的条件. 算子(9)在区域Ω的亚椭圆性的充分条件是：在Ω的每一点上，在算子 $X_j (j = 0, 1, \cdots, r)$ 和由这些算子生成的换位子中，存在m个线性独立算子. 这个 Hörmander 条件也是算子P在区域Ω中的亚椭圆性的必要条件. 如果只限于形式为(9)的一类算子，对于每一点x，在算子X_j和由它们生成的换位子中，刚好存在μ个线性独立算子，这里 $\mu \leqslant m$ 与x无关. 对这种情况，我们说算子组 $\{X_0, \cdots, X_r\}$ 在Ω内有秩μ. Hörmander 的证明利用了李代数和某些特殊函数空间的理论.

[112]给出算子(9)亚椭圆性的 Hörmander 定理的另一证明. 第二章§5给出更一般的定理. 这些证明是基于拟微分算子的理论的. 借助于拟微分算子获得了(9)的解在空间 $\mathscr{H}_s$ 的范数的先验估计；利用第二章§4中证明了的定理，由这些估计可以推出P的亚椭圆性. 由第二章§5中所建立的先验估计同样可以推出(9)的广义解的局部光滑性.

在第二章§5中，我们列举了一类形式为(9)的亚椭圆算子，对于它们，在Ω的某点集M上 Hörmander 条件可能不满足. 证明

算子P在Ω是亚椭圆的，如果：1) 在$\Omega\backslash M$中，算子组$X_j(j=0, 1,\cdots,r)$有秩m，其中M是位于有限个$m-1$维光滑流形$\mathfrak{M}$上的有界点集，其闭包在Ω内；2) 在M的每一点x上，或者对于某些$j=1,\cdots,r$，

$$\sum_{k=1}^{m} a_j^k \Phi_{x_k} \neq 0$$

或者在

$$\sum_{j=1}^{r} \left| \sum_{k=1}^{m} a_j^k \Phi_{x_k} \right| = 0$$

的情况下满足条件

$$\sum_{j=1}^{r} - X_j^2\Phi + iX_0\Phi \neq 0$$

其中，$\Phi(x_1,\cdots,x_m)=0$是$\mathfrak{M}$在x点邻域内的方程，且

$$\operatorname{grad} \quad \Phi \neq 0.$$

对于点集M只由一点x^0所组成的情况，如果在这点上，系数$a_j^k(k=1,\cdots,m;j=0,\cdots,r)$中有一个不为0，则算子(9)在$\Omega$内是亚椭圆的．B. C. Федий[28] 也找到了形式为(9)但不满足 Hörmander 条件的某些亚椭圆算子．

并不是每一个系数无穷次可微的方程(1)都可化为方程(9)的形式．Hilbert 构造过一个两自变量x和y的6次非负多项式$P(x,y)$的例子(参看[48])，它不能表示为有限的多项式的平方和．容易证明：形式为

$$L(u) \equiv z^6 P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)\Delta u + Tu$$

的算子，在原点的任何邻域内不可能表示为(9)的形式，其中T是系数无穷次可微的一阶算子，而$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

对于具非负特征形式形为(1)的一般二阶方程来说，[113]给出了一个亚椭圆性条件．在第二章§6中给出更一般的定理．

令$L^0(x,\xi)=a^{kj}(x)\xi_k\xi_j$．我们用$L^0$表示具有象征$L^0(x,\xi)$

的拟微分算子(参看第二章§2). 对于任意的拟微分算子 A，我们分别用 $A^{(j)}$ 和 $A_{(j)}$ 表示相应于象征 $\partial A(x,\xi)/\partial\xi_j$ 和 $D_jA(x,\xi)$ 的拟微分算子,其中 $A(x,\xi)$ 是算子 A 的象征,而 $D_j=-i\partial/\partial x_j$. 我们将算子 $L(u)$ 写为形式

$$L(u)=-D_j(a^{kj}D_ku)+iQu+cu$$

其中, $Qu=(b^k-a^{kj}_{x_j})D_ku$. 我们考虑算子组 $\{Q_0,Q_1,\cdots,Q_{2m}\}$, 其中 $Q_0=Q$, 当 $j=1,\cdots,m$ 时, $Q_j=L^{(j)}$; $j=m+1,\cdots,2m$ 时, $Q_j=E_{-1}L^0_{(j-m)}$; E_{-1} 是象征为 $\varphi(x)(1+|\xi|^2)^{1/2}$ 且 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 的拟微分算子. 对于任意的多重指标 $I=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ (其中, 对于 $l=1,\cdots,k$, $\alpha_l=0,\cdots,2m$), 我们设 $|I|=\Sigma_1^k\lambda_l$, 其中,当 $\alpha_l=1,\cdots,2m$ 时 $\lambda_l=1$, 而当 $\alpha_l=0$ 时 $\lambda_l=2$. 对于每个多重指标 I, 我们联想到算子 $Q_I=\mathrm{ad}Q_{\alpha_1}\cdots\mathrm{ad}Q_{\alpha_{k-1}}Q_{\alpha_k}$, 其中,对于任意算子 A 和 B, 记 $\mathrm{ad}AB=AB-BA$.

下面我们考虑由算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 生成的算子 Q_I. 算子 Q_I 可以表示为形式 $Q_I=Q_I^0+T_I$, 其中算子 T_I 的阶数至多为零, 而 Q_I^0 是象征为 $q_I^0(x,\xi)$ 的拟微分算子. 我们说算子组在紧集 K 上有秩 m: 如果存在一个数 $R(K)$, 使得对于所有 $x\in K$ 和 R^m 的一切 ξ, 下式

$$1+\sum_{|I|\leqslant R(K)}|q_I^0(x,\xi)|^2\geqslant C_1(1+|\xi|^2),$$

$$C_1=\text{const}>0 \tag{10}$$

成立.

如果在每个属于 Ω 的紧集 K 上,算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 的秩等于 m, 那么形式(1)的算子 L 在 Ω 内是亚椭圆的. 如果算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 在 $\Omega\backslash M$ 的每个紧集上有秩 m, 并且在 M 的点上有

$$a^{kj}\Phi_{x_k}\Phi_{x_j}+|a^{kj}\Phi_{x_kx_j}+b^k\Phi_{x_k}|>0$$

(集合 M 具有前面指出的性质),则算子 L 在 Ω 内也是亚椭圆的. 在此,象在形式为(9)的算子的类似定理中那样,在亚椭圆性定义中的区域 Ω_1, 或者包含集合 M 或者与它不相交. 在这些条件下,方

程(1)具有广义解局部光滑的性质，并且在空间 $\mathscr{H}_s$ 中可以建立一个类似于已知的 Schauder 内估计的先验估计[118]。

如果集合M由一点组成，则在Ω内，要使(1)是亚椭圆的，只须在该点满足不等式

$$\sum_{j=1}^{m} a^{jj} + |b^j| > 0$$

就够了. 形式为(1)的算子亚椭圆性的研究也是以第二章 § 6 的拟微分算子理论为基础来实现的.

对于具有解析系数的方程(1)和(9)，已经获得亚椭圆性的充分必要条件(参看[20]，[98]和第二章 § 8).

容易验证 Brown 运动方程满足上面叙述的亚椭圆性条件. 在 T. Г. Генчев[43]，Hörmander[55]，A. M. Ильин[57] 等人的文章中讨论过类似于 Brown 运动方程的方程类，而且在[55]和[57]中构造了这类方程的基本解.

对于满足 Hörmander 条件或条件(10)的亚椭圆方程，在非光滑区域的第一边值问题的解，可以用类似于 M. B. Келдыш[63]用以研究在Ω的边界退化的二阶椭圆型方程的方法来构造（参看第二章 § 7). 在这个过程中，用区域 $\Omega_1, \cdots, \Omega_n, \cdots$ 来逼近区域 Ω，并且 $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$，将连续边界函数 g 连续延拓到Ω内，再在 Ω_j 内考虑椭圆方程

$$\varepsilon \Delta u + L(u) = f$$

满足边界条件(在 Ω_j 的边界) $u_j^\varepsilon = g$ 的解 u_j^ε. 根据第二章 § 5 和 § 6 证明过的先验估计，证明在内点上当 $\varepsilon \to 0$ 且 $j \to \infty$ 时，序列 $u_j^\varepsilon(x) \to u(x)$. 用闸函数方法证明问题(2)，(3)的解 $u(x)$ 的边界连续性.

具非负特征形式的二阶方程的解的定性性质已经有所研究. 在[29]中 Fichera 证明了(1)的光滑解的极大值原理，在[91]和第一章 § 5 中证明了广义解的同样原理(也可以参看第一章 § 1). 我们要注意在第一章 § 1 中所证的极大值原理和在[29]及第一章 § 2 中所证明的极大值原理的定理之间的差异. 在 Pucci 的论文[108,109]

和 А Д. Александров 的论文[1-5]中对具非负特征形式的一般二阶方程，在 Bony 的论文[15-17]中对形式 (9) 的方程，都进行了强极大值原理的研究(参看第三章 § 1).

在 G 的每点 x 上，考虑相应于矩阵 $\|a^{kj}\|$ 的正特征值的特征向量，并令 $E(x)$ 表示由这些向量生成的线性空间. 如果在曲线 l 上每点的邻域内，存在向量场 $\bar{Y}=(Y_1(x),\cdots,Y_m(x))$，使得 $Y_j\in C^{(1)}$，并且在邻域的每点 x 上，向量 $(Y_1(x),\cdots,Y_m(x))$ 位于平面 $E(x)$ 内，$a^{kj}(x)Y_k(x)Y_j(x)\geqslant \text{const}>0$，而曲线 l 是向量场 $\bar{Y}$ 的轨线，则称曲线 l 为方程(1)的椭圆性曲线. 如果集合 $\mathfrak{M}$ 的任意两点可以用有限段椭圆性曲线弧段组成的曲线联结，并且不存在真正包含 $\mathfrak{M}$ 而具有这种性质的集合，则称集合 $\mathfrak{M}$ 为方程(1)的椭圆连通集合. 如果整个区域 Ω 是一个椭圆连通集合，那么称方程 (1) 在 Ω 内椭圆连通. 不难找到方程在 Ω 是椭圆连通但不是椭圆型方程的例子.

对于方程 (1)，强极大值原理有如下形式(参看[1-5]和第三章 § 1)：设在区域 Ω 内 $L(u)\geqslant 0$，并且系数 $c(x)$ 和 $M=\sup_\Omega u$ 在 Ω 内满足 $Mc\leqslant 0$. 如果对于某点 $x^0\in\Omega$，$u(x^0)=M$，则在包含点 x^0 的椭圆连通集合上，或者 $u\equiv 0$，或者 $u\equiv M$ 并且 $c\equiv 0$. 对于方程 (1)，А. Д. Александров[1-5] 也证明了类似于抛物型方程强极大值原理的定理. 对于形式为

$$Pu=-\sum_{j=1}^{r}X_j^2u+iX_0u+cu=f$$

的方程有关强极大值原理的定理已由 Bony[15-17] 证明. 设 $\bar{X}_j(x)$ 表示向量 $(a_j^1(x),\cdots,a_j^m(x))$，$F$ 表示 Ω 上使 $u(x)=M=\sup_\Omega u$ 的点集. 我们将假设 $c\leqslant 0$ 而 $M\geqslant 0$.

[15]证明了：如果 $P(u)\geqslant 0$，$u\in C^{(2)}(\Omega)$ 并且向量场 $\bar{X}_j(x)$ $(j=1,\cdots,r)$ 的轨线 $x(t)$ 包含集合 F 的一点 $x(t_0)$，则整条轨线 $x(t)$ 属于 F. 对于算子组 $\{X_1,\cdots,X_r\}$ 在 Ω 具有秩 m 的情况，这个方程的强极大值原理与 Laplace 方程的强极大值原理具有相同的形式：如果在 Ω 内 $P(u)\geqslant 0$ 并且 $c\equiv 0$，$u\in C^{(2)}(\Omega)$

而在 Ω 的点 x^0 上取最大正值 M，则在 Ω 内 $u = M$。

对于算子组 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 在 Ω 的每点的秩 $\mu < m$ 的情况，方程(9)的强极大值原理与热传导方程的强极大值原理具有相同的形式。也就是说，设在 Ω 内 $P(u) \geq 0$，$u \in C^{(2)}(\Omega)$ 并且 $u(x)$ 在 Ω 的点 x^0 上取得最大正值 M，那么在 Ω 的这些点上 $u \equiv M$：1）它可以用一条由有限段向量场 $X_j(x)(j = 0, \cdots, r)$ 的轨线弧段组成的曲线联结到 x^0 点；2)当沿这条曲线离开点 x^0 时，位于这曲线上的向量场 $\overline{X}_0(x)$ 的轨线的任何部分必须顺着向量 $\overline{X}_0(x)$ 的方向。

在 Bony 的论文[15-17]中，证明了具有解析系数形式为(9)的方程的 Cauchy 问题的唯一性定理和 Harnack 定理。在区域 Ω 的所有点上适合 $u \geq M$ 的条件下，А. Д. Александров[1-5] 研究了在 Ω 内满足关系式 $L(u) \leq 0$ 的函数 $u(x)$ 的等位面集合 $u = M$。

大量的文章致力于研究形式为

$$u_t = a^{kj}(x, t)u_{x_k x_j} + b^k(x, t)u_{x_k} + c(x, t)u + f(x, t) \tag{11}$$

的退化抛物型方程，其中在所考虑区域的所有的点上，$a^{kj}(x, t)\xi_k\xi_j \geq 0$。显然(11)是(1)的特殊情况。一系列的文章（例如参看[92, 124]等等）用各种方法研究方程(11)的 Cauchy 问题。我们注意到，也可以用第一章和第二章的方法研究(11)在 $t = 0$ 时取初始值的 Cauchy 问题(参看[92])。

联系混合型方程 Tricomi 问题的研究，引起了研究在边界上退化的双曲型方程的兴趣。在[88, 89]中研究了二阶方程的 Cauchy 问题，在所考虑区域的每个点上，方程的特征形式有一个负的特征值，而其余特征值为正或为零。这种方程的 Cauchy 问题，可用类似于研究具非负特征形式的二阶方程所用的方法来进行研究。在[88, 89]中和第三章 §2 中利用双曲正则化方法，获得方程

$$u_{tt} = L(u) + f \tag{12}$$

具初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\phi(x) \tag{13}$$

的 Cauchy 问题的解，其中 $L(u)=a^{kl}u_{x_kx_l}+b^ku_{x_k}+cu$ 是一个具非负特征形式的二阶算子，系数依赖于 x 和 t. 不等式(8)对建立这个问题的解的先验估计起重要的作用．特别，文章中指出(参看第二章 § 2) Cauchy 问题(12)与(13)在 W_2^1 类中有唯一解，并且证明，如果(12)的系数和函数 f，φ 及 ϕ 充分光滑，并且对于任意的 ξ，或者

$$\alpha t(b^k\xi_k)^2\leqslant Aa^{kl}\xi_k\xi_l+a_t^{kl}\xi_k\xi_l \tag{14}$$

或者

$$\alpha(T-t)(b^k\xi_k)^2\leqslant Aa^{kl}\xi_k\xi_l-a_t^{kl}\xi_k\xi_l+\frac{a^{kl}\xi_k\xi_l}{\alpha(T-t)} \tag{15}$$

在考虑的区域 $\{0\leqslant t\leqslant T\}$ 内成立，则成立一个能量估计．这里 α 和 A 是正的常数，α 依赖于(12)的系数、函数 f 及初始函数(13)的光滑次数．

条件 (14) 包括 Cauchy 问题适定性的许多判别准则，可以将这些准则看作(14)的特殊情况(参看[10，12，106] 等)，这些准则起初仅对两个自变量且在给初始数据的直线上退化的二阶双曲型方程为已知的．这些结果的某些概述可以在[123]中找到．

在[62，149]中给出 Cauchy 问题 (12)，(13) 适定性的某些必要条件(也可参看第二章 § 3)．

流体动力学(边界层理论)中的许多问题，过滤理论，涉及到研究 Brown 运动的物理问题，概率论(Markov 过程)的问题，以及其它领域的问题，都导出具非负特征形式的二阶方程．具非负特征形式的拟线性和非线性二阶方程的研究，在空气动力学、边界层理论及其它力学分支的应用中是很重要的(参看 [26，36，90，96，140])．

也曾用基于 K. Itô 的随机方程的概率论方法来研究问题(2)，(3)．对于这种情况，在有界可测函数类中考虑(2)，(3)的广义解，而广义解是用 Markov 过程理论的术语来定义的(参看 [32 –36] 等)．

关于具非负特征形式的二阶方程和高阶的类似方程有许多有趣的未解决的问题.(我们注意,边值问题(2),(3)甚至对最简单的热传导方程 $u_t = u_{xx}$, 还没有完善地研究.[64]详细讨论了这个方程.)在未解决的问题中,我们指出问题(2),(3)的谱的问题.对在边界退化的椭圆型方程,与第一边值问题的谱的特性有关的问题在[80,128,129]中考虑过.

进一步研究有关(2),(3)的广义解的光滑性条件和不光滑性条件的问题是有趣的.研究(2),(3)的不光滑广义解的奇性性质,并且弄清楚产生奇性的条件将是有意义的.

与大范围几何问题相关,兴趣在于描述带有解析系数和解析函数 f 的、形式为(1)的方程类,这类方程的所有充分光滑的解都是解析的(关于这个问题的某些结果可在[148]中找到).

描述(1)的所有适定的边值问题,也是未解决的问题.对于只在边界退化的椭圆型微分方程和拟微分方程,[44,134—136]研究了这个问题.最近建立了拟基本解,即对退化的拟椭圆型方程(不只是二阶的)找到了 Green 函数的主部(例如参看[134—136]).在这些论文中,对于所述方程的边值问题找到了正规可解性条件,它类似于熟知的椭圆算子边值问题的正规可解性条件.

刻划形式为(12),但 Cauchy 问题不适定的方程类是有意义的.这个问题是研究具多重特征的双曲型方程的大量问题的一部分.近年来应用拟微分算子理论和渐近解的方法,对这个问题取得了显著的进展(参看[82],[127],[62],[116],[149],第三章§3等等).

如果本书的问世引起人们对上面提及问题的注意,我们将感到高兴.

第一章 第一边值问题

§1. 符号.辅助结果.第一边值问题的阐述

我们用Ω表示欧几里得空间R^m的有界区域,用$x=(x_1,\cdots,x_m)$表示在这个空间中的点. 在第一章里,除非有特别的说明,所有函数都假定是实的. 通常,记号$A\subset B$表示集合A包含在B内,而$\bar{A}$表示集合A的闭包.

如果对集合$G\subset R^m$的所有点,函数$u(x)$具有直到k阶的连续导数,我们就说它属于$C^{(k)}(G)$类. 我们用$C_{(k)}(G)$表示直到k阶弱导数在G内有界的函数类. 函数类$C^{(0)}$由在G内连续的函数所组成,而$C_{(0)}$包含所有在G内的有界可测函数.

我们用$C^{(k,\beta)}(G)$表示在G内直到k阶导数满足指数为$\beta(0<\beta<1)$的 Hölder 条件的函数类.

我们说边界为Σ的区域Ω属于$A^{(k)}$, $A_{(k)}$或者$A^{(k,\beta)}(k\geq 1)$类,如果在它的每点P的某邻域Q内,边界Σ对某个l可以表示为形式

$$x_l=f_l(x_1,\cdots,x_{l-1},x_{l+1},\cdots,x_m)$$

其中,函数f_l属于相应的函数类$C^{(k)}(Q_l)$,$C_{(k)}(Q_l)$或者$C^{(k,\beta)}(Q_l)$,而Q_l是$Q\cap\Sigma$在平面$x_l=0$上的投影.

我们也考虑边界Σ分片光滑的区域Ω. 这种区域的类型按区域的维数用归纳的办法来定义,用$B^{(k)}$, $B_{(k)}$和$B^{(k,\beta)}$表示. 一维的$B^{(k)}$, $B_{(k)}$或$B^{(k,\beta)}$区域是一个区间. 此外,我们说边界为Σ的区域Ω属于$B^{(k)}$, $B_{(k)}$或者$B^{(k,\beta)}$类,如果Σ可以划分为有限块分片S^l,每块分片同胚于一个$(m-1)$维球,它们如果相交,仅仅在边界点上相交,而S^l对于某个l可以表示为形式

$$x_l=f_l(x_1,\cdots,x_{l-1},x_{l+1},\cdots,x_m)$$

其中，函数 f_l 在超平面 $x_l=0$ 上某相应的 $B^{(k)}, B_{(k)}$ 或 $B^{(k,\beta)}$ 类 $(m-1)$ 维闭域内给定，而且在这个区域内，f_l 相应地属于 $C^{(k)}$，$C_{(k)}$ 或 $C^{(k,\beta)}$ 类。

我们用 $n=(n_1,\cdots,n_m)$ 表示 Ω 的边界点上的内法向量；ϕ 表示空集；$|x|=(\Sigma_1^m x_j^2)^{1/2}$。

假设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 是多重指标，其中 α_j 是非负整数，而 $|\alpha|=\Sigma_1^m\alpha_j$。

在第一章中，我们有时采用下面的导数记号：

$$D^\alpha u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}u$$

通常（例如参看 [56]）也使用记号 $D^\alpha u=D_1^{\alpha_1}\cdots D_m^{\alpha_m}u$，其中 $D_j=-i\partial/\partial x_j$，$i=\sqrt{-1}$. 后面这种记号在第二章中使用更方便.我们规定

$$\|u\|_{C_{(k)}(G)}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_G|D^\alpha u|$$

一般地，用 C_i 表示常数，并且只在给定定理的证明范围内保留用指标 i 来列举这些常数.

我们用 $C_0^\infty(\Omega)$ 或 $C_0^\infty(R^m)$ 表示仅在属于相应的区域 Ω 或 R^m 的紧集上不为 0 的无穷次可微函数类。

形如

$$L(u)=a^{kj}(x)u_{x_kx_j}+b^k(x)u_{x_k}+c(x)u=f(x) \qquad (1.1.1)$$

的二阶方程，若对于任意实向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 和任意点 $x\in\Omega$，具有条件

$$a^{kj}(x)\xi_k\xi_j\geqslant 0 \qquad (1.1.2)$$

就称为 Ω 上的具非负特征形式的二阶方程。

这里及以后始终假定重复指标是从 1 到 m 求和。

显然，具非负特征形式的方程类包含椭圆型和抛物型方程，一阶方程（$a^{kj}\xi_k\xi_j\equiv 0$ 的情况），超抛物型方程，Brown 运动方程，在上半平面的 Tricomi 方程，М. В. Келдыш 方程，等等。

我们在区域Ω内考虑方程(1.1.1)的第一边值问题；这个问题由 Fichera 在[29]中首先提出它的一般形式. 我们假设对于 $\Omega\cup\Sigma$ 内的所有点 x 和所有 $\xi\in R^m$ 满足条件 (1.1.2), Ω属于 $A_{(1)}$ 类，并且 $a^{kl}\in C_{(2)}(\Omega)$, $b^k\in C_{(1)}(\Omega)$, $c\in C_{(0)}(\Omega)$. 我们用Σ^0表示Σ上 $a^{kl}(x)n_kn_l=0$ 的点集. 在 Σ^0 的点上考虑函数

$$b(x)\equiv(b^k-a^{kl}_{x_l})n_k \tag{1.1.3}$$

我们称它为方程(1.1.1)的 Fichera 函数. 我们用Σ_1表示 Σ^0 上 $b>0$ 的点集，Σ_2 表示 Σ^0 上 $b<0$ 的点集，而 Σ_0 表示 Σ^0 上 $b=0$ 的点集. 集合 $\Sigma\backslash\Sigma^0$ 记为 Σ_3.

如果 Ω 的边界Σ属于 $B^{(k)}$, $B_{(k)}$ 或者 $B^{(k,\beta)}$ 类，那么 Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 就可类似地予以定义，为此目的只考虑 S' 的内点.

方程(1.1.1)的第一边值问题如下：在$\Omega\cup\Sigma$中求函数u，使得

$$L(u)=f,\quad 在\Omega内 \tag{1.1.4}$$

$$u=g,\quad 在\ \Sigma_2\cup\Sigma_3\ 上 \tag{1.1.5}$$

其中，f是Ω内的给定函数，而g是$\Sigma_2\cup\Sigma_3$上的给定函数. 显然，如果(1.1.1)是椭圆型，那么问题(1.1.4), (1.1.5)是 Dirichlet 问题. 对于柱形区域内的抛物型方程，(1.1.4),(1.1.5)组成混合问题，或者，有时也称为抛物型方程的第一边值问题.

另一个例子，对于一阶方程 $-u_{x_1}=f(x)$, 矩形 $\Omega=\{0<x_1<X_1,\ 0<x_2<1\}$ 的边界Σ包含直线 $x_2=0$, $x_2=1$ 上的集合Σ_0，直线 $x_1=0$ 上的集合Σ_2和直线 $x_1=X_1$ 上的集合Σ_1. 在这种情况下，问题(1.1.4), (1.1.5)与 Cauchy 问题一致.

在 (x,y) 平面上，由x轴上的线段和位于上半平面$y\geq0$上的曲线Γ所围成的区域Ω内，考虑 M. B. Келдыш 方程

$$y^\gamma\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial y}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+c(x,y)u=0,\quad \gamma=\text{const}>0 \tag{1.1.6}$$

当$\gamma\geq1$时，问题(1.1.4),(1.1.5)与[63]中所研究的问题E或D一致.

我们引入记号

$$L^*(v) = (a^{kl}v)_{x_kx_l} - (b^kv)_{x_k} + cv$$
$$= a^{kl}v_{x_kx_l} + b^{*k}v_{x_k} + c^*v \qquad (1.1.7)$$

其中

$$b^{*k} = 2a^{kl}_{x_l} - b^k, \quad c^* = a^{kl}_{x_kx_l} - b^k_{x_k} + c$$

容易看出，对于算子 $L^*(v)$，Fichera 函数 b^* 等于 $-b$，这里 b 是算子 $L(u)$ 的 Fichera 函数(1.1.3)。

我们将证明：对于算子 $L(u)$，将区域Ω的边界Σ分解为子集 Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3，关于自变量的光滑非退化变换是不变的，所以问题(1.1.4)，(1.1.5)对这种坐标变换也是不变的。

引理 1.1.1 在区域Ω的边界Σ的点集Σ^0上，函数

$$b = (b^k - a^{kl}_{x_l})n_k$$

的符号对(1.1.1)的自变量的光滑非退化变换是不变的。

证明 在方程(1.1.1)中，我们作变量变换

$$y_l = F^l(x_1, \cdots, x_m), \quad l = 1, \cdots, m \qquad (1.1.8)$$

假设在所考虑边界Σ的点的邻域内，Σ由方程

$$F(x_1, \cdots, x_m) = \Phi(y_1, \cdots, y_m) = 0 \qquad (1.1.9)$$

给出，并且假设 grad$F$ 和 grad Φ 与内法线有相同的方向。对于新变量，方程(1.1.1)有形式

$$a^{kj}F^l_{x_k}F^s_{x_j}u_{y_ly_s} + b^kF^l_{x_k}u_{y_l} + a^{kj}F^l_{x_kx_j}u_{y_l} + cu = f \qquad (1.1.10)$$

对于(1.(1.1)，函数 b 可以写为形式

$$b \equiv (b^k - a^{kj}_{x_j})n_k = (b^k - a^{kj}_{y_l}F^l_{x_j})\Phi_{y_s}F^s_{x_k}(F_{x_\rho}F_{x_\rho})^{-1/2}$$

现在我们计算(1.1.10)的 Fichera 函数 $\tilde{b}$。我们有

$$\tilde{b} = [b^kF^l_{x_k} + a^{kj}F^l_{x_kx_j} - (a^{kj}F^l_{xx}F^s_{x_j})_{y_s}]\Phi_{y_l}(\Phi_{y_\rho}\Phi_{y_\rho})^{-1/2}$$
$$= [b^kF^l_{x_k} - a^{kj}_{y_s}F^l_{x_k}F^s_{x_j}]\Phi_{y_l}(\Phi_{y_\rho}\Phi_{y_\rho})^{-1/2}$$
$$+ [a^{kj}F^l_{x_ky_s}F^s_{x_j} - a^{kj}F^l{}_{x_ky_s}F^s_{x_j}$$
$$- a^{k}F^l_{x_k}F^s_{x_jy_s}]\Phi_{y_l}(\Phi_{y_\rho}\Phi_{y_\rho})^{-1/2}$$
$$= b(F_{x_k}F_{x_k})^{1/2}(\Phi_{y_\rho}\Phi_{y_\rho})^{1/2}$$
$$- a^{kj}F^l_{x_k}F^s_{x_jy}\Phi_{y_l}(\Phi_{y_\rho}\Phi_{y_\rho})^{-1/2} \qquad (1.1.11)$$

因为在Σ^0上

$$a^{kj}F^l_{x_k}F^s_{x_j y_s}\Phi_{y_l} - a^{kj}F_{x_k}F^s_{x_j y_s} \text{ 和 } a^{kj}F_{x_k} = 0$$

(1.1.11)的最后一项等于 0 .所以

$$\tilde{b} = b(F_{x_k}F_{x_k})^{1/2}(\Phi_{y_p}\Phi_{y_p})^{-1/2}$$

因而引理证毕。

定理 1.1.1 由算子 $L(u)$ 所确定的边界 Σ 的子集 $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 对(1.1.1)的自变量的光滑非退化变换保持不变。

证明 如果在所考虑点的邻域内边界 Σ 由(1.1.9)给出，而 $\bar{n}' = (n'_1, \cdots, n'_m)$ 表示在空间 $(y_1, \cdots, y_m)$ 中 Σ 的内法向量，在形如(1.1.8)的自变量变换下，集合 Σ_3 的不变性从方程

$$\begin{aligned} a^{kj}n_k n_j &= a^{kj}\Phi_{y_l}F^l_{x_k}\Phi_{y_s}F^s_{x_j}(F_{x_p}F_{x_p})^{-1} \\ &= a^{kj}F^l_{x_k}F^s_{x_j}n'_l n'_s(F_{x_p}F_{x_p})^{-1}(\Phi_{y_p}\Phi_{y_p}) \end{aligned}$$

得出. 集合 Σ_0, Σ_1, Σ_2 的不变性从 Σ_3 的不变性和引理 1.1.1 得出。定理证毕。

现在我们建立算子 $L(u)$ 的 Green 公式. 设 u 和 v 是 $C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$ 类的函数，区域 Ω 属于 $B^{(1)}$ 类. 算子 $L(u)$ 可以写成形式

$$L(u) \equiv (a^{kj}u_{x_k})_{x_j} + (b^k - a^{kj}_{x_j})u_{x_k} + cu \qquad (1.1.12)$$

令 $b^k - a^{kj}_{x_j} = l^k$, 我们有

$$L^*(v) = (a^{kj}v_{x_k})_{x_j} - (l^k v)_{x_k} + cv$$

$$L(u)v - L^*(v)u = (a^{kj}vu_{x_k} - a^{kj}uv_{x_k})_{x_j} + (l^k uv)_{x_k}$$

在区域 Ω 上积分后面的恒等式，并且应用 Остроградский 公式，我们得到

$$\iint_\Omega (L(u)v - L^*(v)u)dx$$

$$= -\int_\Sigma [(a^{kj}u_{x_k}v - a^{kj}v_{x_k}u)n_j + l^k uvn_k]d\sigma \quad (1.1.13)$$

其中，$\bar{n}$ 是 Σ 的内法向量，$d\sigma$ 是 Σ 的面元素.

显然，在 Σ^0 上对于 $k = 1, \cdots, m$ 满足等式 $a^{kj}n_j = 0$, 而在 Σ_3 上向量 $\bar{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_m)$ 的长度不等于 0，其中 $\nu_k = a^{kj}n_j$. 按定义 $l^k n_k = b$. 因此，从(1.1.13)得到

$$\int_{\Omega}(L(u)v - L^*(v)u)dx$$

$$= -\int_{\Sigma_3}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)d\sigma - \int_{\Sigma} buv d\sigma \qquad (1.1.14)$$

其中，$\partial/\partial\bar{\nu} = a^{kj}n_j\partial/\partial x_k$. 公式(1.1.14)称为(1.1.1)的 Green 公式.

假设在边界Σ的某点P的邻域内，Σ的方程为形式 $F(x_1,\cdots,x_m) = 0$，并且 $\mathrm{grad}F \neq 0$，而在Ω内 $F > 0$. 在Σ上我们考虑函数 $\beta = L(F)$. 容易看出，关于(1.1.1)的自变量变换，β是不变量. 我们用 Σ_0'，Σ_1'，Σ_2' 表示Σ^0上相应于$\beta = 0, \beta > 0, \beta < 0$的点集. 令 $\sigma^* = \Sigma_0' \cup \Sigma_1'$.

引理 1.1.2 假设 $u \in C^{(2)}(\Omega \cup \sigma^*)$ 和 $u \in C^{(0)}(\Omega \cup \Sigma)$，并且区域$\Omega$属于$A_{(1)}$类. 如果在$\Omega \cup \sigma^*$内或者 $L(u) \leqslant 0$ 且 $c < 0$，或者 $L(u) < 0$ 且 $c \leqslant 0$，则$u(x)$只能在 $\Sigma_2' \cup \Sigma_3$ 上取最小负值. 如果区域Ω属于$B_{(2)}$类，那么应当将 $\Sigma_2' \cup \Sigma_3$ 改为 $\Sigma \backslash \sigma^*$.

证明 假设函数 $u(x)$ 在区域Ω的内点P取最小负值.

我们作自变量变换 $x = Ay$，其中A是常数矩阵，并且 $\det|A| \neq 0$. 我们选择A，使得算子 $L(u)$ 在点P上对新坐标系取标准型

$$L(u) = \alpha^{kj}u_{y_k y_j} + \beta^k u_{y_k} + cu \qquad (1.1.15)$$

这表示：在P点对于 $k \neq j$，系数 $\alpha^{kj} = 0$，并且α^{kk}等于0或者1 $(k = 1,\cdots,m)$. 因为假设函数u在点P有局部极小，从而推得在点P有 $u_{y_k} = 0$ 和 $u_{y_k y_k} \geqslant 0$. 因此在点P，如果 $c < 0$，则 $L(u) > 0$，如果 $c \leqslant 0$，则 $L(u) \geqslant 0$，这与引理的假设矛盾.

现在我们证明，u的最小负值不能在σ^*的任意点上取得. 否则，假设u在σ^*的点P取最小负值. 在P的邻域内我们引进新坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得边界Σ位于平面 $y_m = 0$ 上，并且在P点Σ的内法线与 y_m 轴的方向重合. 对于新变量，算子 $L(u)$ 取形式(1.1.15).

显然，在P的某邻域内的σ^*的点上，对于 $j = 1,\cdots,m$，我

们有 $\alpha^{m\prime}=0$，$\beta^{m}=\beta\geqslant 0$.

如有必要，通过做另一坐标变换（它保持平面 $y_m=\text{const}$ 不变），我们可以假设算子(1.1.15)在点 P 具有标准型.

由于函数 u 在点 P 取到负的极小值，从而推得在这点上

$$u_{y_k}=0\ ,u_{y_ky_k}\geqslant 0(k=1,\cdots,m-1);\ u_{y_m}\geqslant 0$$

因此在点 P 上，如果 $c<0$，不等式 $L(u)>0$ 成立，如果 $c\leqslant 0$，则 $L(u)\geqslant 0$. 但这与引理的假设矛盾. 所以函数 u 的最小负值只能在 $\Sigma\backslash\sigma^*$ 的点上取到.

定理 1.1.2（极大值原理） 假设 $u\in C^{(2)}(\Omega\cup\sigma^*)$，$u\in C^{(0)}(\Omega\cup\Sigma)$，区域 Ω 属于 $A_{(2)}$ 类. 假设在 $\Omega\cup\Sigma$ 上 $c<0$，并且在 $\Omega\cup\sigma^*$ 内 $L(u)=f$. 那么

$$|u|\leqslant\max\left\{\sup_{\Omega}\left|\frac{f}{c}\right|,\ \max_{\Sigma_2'\cup\Sigma_3}|u|\right\}=M \qquad (1.1.16)$$

如果在 $\Omega\cup\Sigma$ 上 $c<0$，并且在 Ω 内 $L(u)=0$，那么在 Ω 的点上

$$|u|\leqslant\max_{\Sigma_2'\cup\Sigma_3}|u| \qquad (1.1.17)$$

如果区域是 $B_{(2)}$ 类，那么应当将集合 $\Sigma_2'\cup\Sigma_3$ 改为 $\Sigma\backslash\sigma^*$（当 $\Sigma_2'\cup\Sigma_3=\phi$ 时，令 $\max_{\Sigma_2'\cup\Sigma_3}|u|=0$）.

证明 考虑函数

$$v_{\pm}=M\pm u$$

那么在 $\Omega\cup\sigma^*$ 内，因为 $M\geqslant\sup|f/c|$，所以我们有

$$L(v_{\pm})=cM\pm f\leqslant 0$$

因此按引理 1.1.2，函数 $v_{\pm}$ 只能在 $\Sigma\backslash\sigma^*$ 的点上取最小负值. 但在 $\Sigma\backslash\sigma^*$ 上函数 $v_{\pm}=M\pm u\geqslant 0$. 所以在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $v_{\pm}\geqslant 0$，从而 $|u|\leqslant M$，即(1.1.16)成立.

不等式(1.1.17)是(1.1.16)的推论. 定理证毕.

在[30]中用不同的方法得到一个接近于定理 1.1.2 的定理（亦可参看第一章§2）. 容易证明 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 的内点包含在集合 $\Sigma_0'\cup\Sigma_1'$

内。

在第一章 § 5 中，我们将证明在某种意义下比定理 1.1.2 更一般的定理，即证明 (1.1.1) 的广义解的极大值原理。

我们注意，在定理 1.1.2 的证明中只要求 Σ 位于 $\Sigma_0' \cup \Sigma_1'$ 内的那部分是光滑的。定理 1.1.2 包含椭圆和抛物型方程的熟知的极大值原理。

我们还要注意到：定理 1.1.2 的假定 $c < 0$ 是本质的，不能用条件 $c \leqslant 0$ 代替。实际上，方程

$$L(u) = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

在形为 $\frac{1}{2} < x_1^2 + x_2^2 < 1$ 的环形域 Ω 内整个边界都属于 Σ_0，然而，任何函数 $u = \text{const} \neq 0$ 都满足方程，因而(1.1.17)不成立。

§ 2. 在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间的先验估计

这一节我们得到问题

$$L(u) = a^{kj} u_{x_k x_j} + b^k u_{x_k} + cu = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$
$$u = 0, \quad \text{在 } \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \text{ 上} \tag{1.2.1}$$

的光滑解的先验估计，以后在证明这个问题的存在定理时将要用到。我们假设对于算子 $L(u)$ 和区域 Ω，Green 公式(1.1.14)是成立的。引进记号

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p},$$

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Sigma_j)} = \left(\int_{\Sigma_j} |u|^p dx\right)^{1/p}$$

本节和下面两节给出的结果，是 Fichera[30] 获得的。

引理 1.2.1 假设 $u \in C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$，在 $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 上 $u = 0$，p 是满足 $1 \leqslant p < \infty$ 的任意数。假设存在函数 $w \in C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$，满足条件

$$w \leqslant 0, \quad L^*(w) + c(p-1)w > 0, \text{ 在 } \Omega \cup \Sigma \text{ 内} \tag{1.2.2}$$

则

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \leqslant \frac{\max\limits_{\Omega\cup\Sigma} p|w|}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}\{L^*(w) + (p-1)cw\}} \|Lu\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \tag{1.2.3}$$

证明 将 Green 公式 (1.1.14) 应用于函数 w 及 $(u^2+\delta)^{p/2}$，其中 $\delta > 0$ 是任意的．考虑到在 Σ_3 上

$$\frac{\partial(u^2+\delta)^{p/2}}{\partial\bar{\nu}} = p(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1} u a^{kl} u_{x_k} n_l = 0$$

我们有

$$\int_\Omega L^*(w)(u^2+\delta)^{p/2}dx - \int_\Omega wL((u^2+\delta)^{p/2})dx$$

$$= \int_{\text{[illegible]}} bw(u^2+\delta)^{p/2}d\sigma$$

$$- \int_{\Sigma_3} (u^2+\delta)^{p/2}\frac{\partial w}{\partial\bar{\nu}}d\sigma \tag{1.2.4}$$

容易看出

$$L((u^2+\delta)^{p/2}) = p(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}uL(u)$$

$$+ c(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}[(1-p)u^2+\delta]$$

$$+ a^{kl}u_{x_k}u_{x_l}p(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-2}[(p-1)u^2+\delta]$$

因为在 Σ_1 上不等式 $b > 0$ 成立，并且 $a^{kl}u_{x_k}u_{x_l} \geqslant 0$，$p \geqslant 1$，$w \leqslant 0$，由此得到

$$\int_\Omega\{L^*(w)(u^2+\delta)^{p/2} - w(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\cdot c[(1-p)u^2+\delta]\}dx$$

$$\leqslant \int_\Omega wp(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}uL(u)dx + \delta^{p/2}$$

$$\times\int_{\Sigma_2\cup\Sigma_3} bwd\sigma - \delta^{p/2}\int_{\Sigma_3}\frac{\partial w}{\partial\bar{\nu}}d\sigma \tag{1.2.5}$$

在 (1.2.5) 中，让 δ 趋于零．若 $p > 1$，则当 $\delta \to 0$ 时，

$$(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}u \to |u|^{p-2}u.$$

如果 $p=1$，那么 $|(u^2+\delta)^{-1/2}u|\leqslant 1$. 对于 $p\geqslant 1$

$$\lim_{\delta\to 0}(u^2+\delta)^{p/2}\{L^*(w)-cw(u^2+\delta)^{-1}[(1-p)u^2+\delta]\}$$

$$=|u|^p\{L^*(w)-(1-p)cw\}$$

因此，从 (1.2.5) 得到

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant \frac{p\max\limits_{\Omega\cup\Sigma}|w|}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]}$$

$$\times\int_\Omega |u|^{p-1}|L(u)|dx \tag{1.2.6}$$

对 (1.2.6) 右端的积分应用 Hölder 不等式，我们得到(1.2.3).

定理 1.2.1 如果在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c<0$，则对于在 $\Omega\cup\Sigma$ 内，使 $-c^*+(1-p)c>0$ 的所有充分大的 p 和在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上满足 $u=0$ 的所有函数 $u\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，估计

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant\frac{p}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[-c^*+(1-p)c]}\|L(u)\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \tag{1.2.7}$$

成立. 如果在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c^*<0$，则对于在 $\Omega\cup\Sigma$ 内满足 $-c^*+(1-p)c>0$ 的所有充分接近于 1 的 p，估计式 (1.2.7) 成立. 如果 $c^*<0$ 且 $c<0$，则对于所有的 $p\geqslant 1$ 和在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上满足 $u=0$ 的所有的 $u\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ (1.2.7)，成立.

定理 1.2.1 的证明可以从引理 1.2.1 推得，因为对所考虑的情况，可取 $w=-1$.

注 如果 $c<0$，$u\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，并且在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上 $u=0$，则在 (1.2.7) 中，当 $p\to\infty$ 时可取极限. 事实上，设数 p_0 满足 $-c^*+(1-p_0)c>0$，那么当 $p>p_0$ 时，我们有 $-c^*+(1-p)c>c(p_0-p)$，并且估计式 (1.2.7) 可写成如下形式

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant\frac{p}{(p-p_0)\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}|c|}\|L(u)\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \tag{1.2.8}$$

在 (1.2.8) 中对 $p\to\infty$ 取极限，我们得到如下形式的极大值原理：

对于 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上满足条件 $u=0$ 的任一函数 $u\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，不等式

$$\max_{\Omega\cup\Sigma}|u|\leqslant\frac{\max\limits_{\Omega\cup\Sigma}|L(u)|}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}c}\tag{1.2.9}$$

成立。

定理 1.2.2 假设对某些 $p\geqslant 1$ 存在满足下列条件的函数 $w\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$：

在 $\Omega\cup\Sigma$ 上 $w\leqslant 0$，$L^*(w)+(p-1)cw>0$，在 Σ_3 上

$$w=0.$$

那么，如果 $u\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 是满足 $L(u)=0$ 的任意函数，则不等式

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant K_p\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Sigma_2)}+K'\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Sigma_3)}\tag{1.2.10}$$

成立，其中

$$K_p=\left\{\frac{\sup\limits_{\Sigma_2}|bw|}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]}\right\}^{1/p};$$

$$K'_p=\left\{\frac{\sup\limits_{\Sigma_3}|a^{kl}w_{x_k}n_l|}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[L^*(w)+(p-1)cw]}\right\}^{1/p}.$$

证明 如同引理 1.2.1 的证明，我们对函数 w 和 $(u^2+\delta)^{p/2}$ 应用(1.1.14)。从(1.2.4)及函数 u 与 w 的性质，我们推出

$$\int_\Omega\{(u^2+\delta)^{p/2}L^*(w)-cw(u^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}[(1-p)u^2+\delta]\}dx$$

$$\leqslant\int_{\Sigma_2}bw(u^2+\delta)^{p/2}d\sigma-\int_{\Sigma_3}(u^2+\delta)^{p/2}\frac{\partial w}{\partial\bar{\nu}}d\sigma$$

在上述不等式中，令 δ 趋于零，我们得到

$$\int_\Omega|u|^p[L^*(w)+(p-1)cw]dx$$

$$\leqslant\int_{\Sigma_2}wb|u|^pd\sigma+\int_{\Sigma_3}|u|^p\left|\frac{\partial w}{\partial\bar{\nu}}\right|d\sigma\tag{1.2.11}$$

显然这蕴涵 (1.2.10)。定理证毕。

§3. 在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间第一边值问题解的存在性

假设函数 u 属于 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类，并且在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上 $u=0$. 我们用 V 表示函数 v 属于 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 且在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上 $v=0$ 的函数类. 则从 (1.1.14) 得到

$$\int_\Omega uL^*(v)dx=\int_\Omega vL(u)dx$$

定义 函数 $u\in\mathscr{L}_p(\Omega)$，称 u 为

$$L(u)=f, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \tag{1.3.1}$$

$$u=0, \quad \text{在 } \Sigma_2\cup\Sigma_3 \text{ 上} \tag{1.3.2}$$

的弱解，如果对 V 类的任一函数 v，满足等式

$$\int_\Omega vf dx=\int_\Omega uL^*(v)dx \tag{1.3.3}$$

定理 1.3.1 如果在 Ω 内 $c^*<0$ 并且 $c<0, p>1$，则对于任意的 $f\in\mathscr{L}_p(\Omega)$，问题 (1.3.1), (1.3.2) 存在一弱解，满足不等式

$$\inf_{u_0\in Z}\|u+u_0\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant K\|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}, \quad K=\text{const} \tag{1.3.4}$$

其中，Z 是 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的函数集合，其元素 u_0 对于 V 的任一函数 v，满足条件

$$\int_\Omega u_0L^*(v)dx=0$$

证明 根据定理 1.2.1，对 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 中，且在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上为 0 的任意函数 v，对于任意的 $q\geqslant 1$，满足

$$\|v\|_{\mathscr{L}_q(\Omega)}\leqslant\frac{q}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[-c+(1-q)c^*]}\|L^*v\|_{\mathscr{L}_q(\Omega)} \tag{1.3.5}$$

这是因为，对于算子 $L^*(v)$ 的集合 Σ_2 与对于算子 $L(u)$ 的集合 Σ_1 是相同的。

我们把

$$\int_{\Omega} fv dx$$

看作为 $\mathscr{L}_q(\Omega)$ 空间中对 v 的一个泛函，其中 $1/q + 1/p = 1$。应用 Holder 不等式和估计 (1.3.5)，我们得到

$$\left|\int_{\Omega} fv dx\right| \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \|v\|_{\mathscr{L}_q(\Omega)}$$
$$\leqslant K_q \|L^*(v)\|_{\mathscr{L}_q(\Omega)} \|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \qquad (1.3.6)$$

其中

$$K_q = \frac{q}{\min\limits_{\Omega \cup \Sigma} [-c + (1-q)c^*]}$$

设 $\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 表示形如 $L^*(v)$ (其中 v 属于 V 类)的函数集合在空间 $\mathscr{L}_q(\Omega)$ 中闭化后所得到 $\mathscr{L}_q(\Omega)$ 的子空间。容易看出，$\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 上的泛函空间与商空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)/Z$ 重合，其中 Z 是 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的子空间，它的元素 z 对于 V 的任意 v 成立

$$\int_{\Omega} L^*(v) z dx = 0$$

事实上，根据 Hahn-Banach 定理[144]，$\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 上的每个泛函可以扩充到 $\mathscr{L}_q(\Omega)$，因此 $\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 上的每个泛函可写为如下形式

$$\int_{\Omega} u L^*(v) dx \qquad (1.3.7)$$

其中 $u \in \mathscr{L}_p(\Omega)$。显然，商空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)/Z$ 的每个陪集 (*coset*) 在 $\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 中产生形如(1.3.7)的唯一的泛函。

由(1.3.6)推出：$\int_{\Omega} fv dx$ 是 $\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 内 $L^*(v)$ 的线性连续泛函，因而它可以用 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间的一个函数 u 表示成 (1.3.7) 的形式。所以有

$$\int_{\Omega} fv dx = \int_{\Omega} u L^*(v) dx$$

其中，u 是 $\mathscr{L}_p(\Omega)/Z$ 中的相应陪集的任一元素。显然每一个这样的 u 满足不等式

$$\left|\int_{\Omega} u L^*(v) dx\right| \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \|v\|_{\mathscr{L}_q(\Omega)}$$

$$\leqslant K_q\|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\|L^*(v)\|_{\mathscr{L}_q(\Omega)}$$

再根据 $\tilde{\mathscr{L}}_q(\Omega)$ 中泛函范数的定义，可以推得

$$\inf_{u_0\in\mathfrak{N}}\|u+u_0\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant K_q\|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}$$

定理证毕.

定理 1.3.2 假设在 $\Omega\cup\Sigma$ 中 $c<0$, $1/p+1/q=1$, 并且假设 q 在 $\Omega\cup\Sigma$ 中满足 $-c+(1-q)c^*>0$. 那么，如果 $f(x)\in\mathscr{L}_p(\Omega)$, 则问题(1.3.1), (1.3.2)存在满足(1.3.4)的广义解.

定理 1.3.3 假设在 $\Omega\cup\Sigma$ 中 $c^*<0$, 并且假设 q 在 $\Omega\cup\Sigma$ 中满足 $-c+(1-q)c^*>0$, 且 $1/p+1/q=1$. 那么，对于任意的 $f\in\mathscr{L}_p(\Omega)$, (1.3.1),(1.3.2)存在满足(1.3.4)的广义解.

定理 1.3.2 和 1.3.3 的证明完全跟定理 1.3.1 的证明一样. 由这些定理可推得：当 $c<0$ 时，对于充分大的 p，问题 (1.3.1), (1.3.2)是可解的；当 $c^*<0$ 时，这个问题对于充分接近于1的 p 是可解的.

在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间中，问题(1.3.1), (1.3.2)的解的存在定理将在第一章§5中用另外的方法证明.

§4. 在 Hilbert 空间第一边值问题的弱解的存在性

在这一节，我们用一种基于 Riesz 定理的方法来证明(1.3.1), (1.3.2)的弱解的存在性，以前在研究椭圆型方程和方程组时曾经用过这个方法(例如参看[132, 39, 13]).

在某 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中，问题(1.3.1), (1.3.2)的弱解的定义基于如下设想.

假设 u 是 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 的函数，在 Σ_2 和 Σ_3 上等于0，并且假设 v 是 $C^{(1)}(\Omega\cup\Sigma)$ 的一个函数，在 Σ_3 上等于0. 分部积分后，我们得到如下的恒等式：

$$\int_\Omega vL(u)dx=-\int_\Omega[a^{kj}v_{x_k}u_{x_j}+u(b^k-a^{kj}_{x_j})v_{x_k}$$

$$+(b^k_{x_k}-a^{kj}_{x_kx_j}-c)uv]dx-\int_{\Sigma_1}uvbd\sigma$$

把 $C^{(1)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类中在 Σ_3 上等于 0 的函数 v 的集合记为 W. 对 W 的函数，我们引进内积

$$(u,v)_{\mathscr{H}}=\int_\Omega(a^{kj}u_{x_k}v_{x_j}+uv)dx$$

$$+\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}uv|b|d\sigma \qquad (1.4.1)$$

用 $\mathscr{H}$ 表示按这个内积所导出的范数把 W 闭化所得到的 Hilbert 空间。

对于 W 中的 u 和 v，我们考虑双线性形式

$$B(u,v)=-\int_\Omega[a^{kj}u_{x_k}v_{x_j}+u(b^k-a^{kj}_{x_j})v_{x_k}$$

$$+(b^k_{x_k}-a^{kj}_{x_kx_j}-c)uv]dx-\int_{\Sigma_1}uvbd\sigma \qquad (1.4.2)$$

下面我们来证明：$B(u,v)$ 的定义可以扩展到适用于 $\mathscr{H}$ 中的所有函数 u 和 W 中的 v. 事实上，对于 W 中的 u 和 v，我们有

$$|B(u,v)|\leqslant M\left(\int_\Omega[v_{x_k}v_{x_k}+v^2]dx\right.$$

$$\left.+\int_{\Sigma_1}v^2d\sigma\right)^{1/2}\|u\|_{\mathscr{H}} \qquad (1.4.3)$$

其中，M 是仅与方程 (1.3.1) 的系数有关的常数. 从 (1.4.3) 推得：对于在 W 中固定的 v，$B(u,v)$ 可以看作在 $\mathscr{H}$ 中关于 u 的线性有界泛函.

定义 假设 $f\in\mathscr{L}_2(\Omega)$，称在 $\mathscr{H}$ 中的一个函数 u 为(1.3.1), (1.3.2)的弱解，如果对 W 中的任意函数 v，等式

$$\int_\Omega vfdx=B(u,v) \qquad (1.4.4)$$

成立。

注 上面定义在空间 $\mathscr{H}$ 中的弱解 u，也是同一问题按前面 (1.3.3)定义在空间 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的弱解.

事实上，如果在 $\mathscr{H}$ 中的 u 满足(1.4.4)，那么在 W 中一定存

在依 $\mathscr{H}$ 的范数趋于 u 的序列 u_n，当 $n\to\infty$ 时，$B(u_n, v)\to B(u, v)$。如果函数 v 属于 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，并且在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 上等于 0，则双线性形式 $B(u_n, v)$ 可以用分部积分加以变换，使得

$$B(u_n, v)=\int_\Omega L^*(v)u_n dx$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} B(u_n, v)=B(u, v)=\int_\Omega L^*(v)udx$$

因此，对于这样的 v，等式

$$B(u, v)=\int_\Omega L^*(v)udx$$

成立。这表示问题(1.3.1)，(1.3.2)在(1.3.4)意义下的弱解 u，也是这个问题在(1.3.3)意义下的弱解，因为 $\mathscr{H}$ 的每个函数也是 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的元素。

定理 1.4.1 假设不等式

$$\frac{1}{2}b^k_{x_k}-\frac{1}{2}a^k_{x_k x_l}-c\geqslant c_0>0$$

在 $\bar{\Omega}$ 上成立，又假设 $f\in\mathscr{L}_2(\Omega)$。则在 $\mathscr{H}$ 中存在一个函数 u，它是问题(1.3.1)，(1.3.2)在(1.3.4)意义下的弱解。

证明 由于对于 W 中的每个 v，$B(u, v)$ 是在 $\mathscr{H}$ 中对 u 的线性连续泛函，由 Hilbert 空间线性连续泛函的 Riesz 表现定理，可推得

$$B(u, v)=(u, T(v))_{\mathscr{H}}$$

其中，$T(v)$ 是在 W 上取值于 $\mathscr{H}$ 的线性算子。

假设 $v\in W$。因为由假设在 Ω 内 $\frac{1}{2}b^k_{x_k}-\frac{1}{2}a^{kl}_{x_k x}-c>0$，得到

$$|B(v, v)|=\int_\Omega\Big[a^{kl}v_{x_k}v_{x_l}+\Big(\frac{1}{2}b^k_{x_k}-\frac{1}{2}a^{kl}_{x_k x}-c\Big)v^2\Big]dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} v^2 b d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\Sigma} v^2 b d\sigma$$

$$\geqslant \alpha\|v\|^2_{\mathscr{H}};\ \alpha = \text{const} > 0$$

由此依次推得

$$\|v\|^2_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{1}{\alpha}|B(v, v)|$$

$$= \frac{1}{\alpha}|(v, T(v))_{\mathscr{H}}|$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\|v\|_{\mathscr{H}}\|T(v)\|_{\mathscr{H}}$$

从而

$$\|v\|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|T(v)\|_{\mathscr{H}} \tag{1.4.5}$$

从估计式(1.4.5)推得：由算子T定义的从W到$\mathscr{H}$的映射是一对一的。我们用$\mathscr{H}'$表示集合$T(v)(v\in W)$在$\mathscr{H}$的范数下的闭包。

由于

$$\left|\int_\Omega fvdx\right| \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)}\|v\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)}\|v\|_{\mathscr{H}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\|f\|_{\mathscr{L}_2(\Omega)}\|Tv\|_{\mathscr{H}'}$$

积分$\int_\Omega fvdx$可以看作$\mathscr{H}'$上的线性连续泛函．所以由 Riesz 定理，在$\mathscr{H}'$中存在函数u，使得对于W中的任意v，有

$$\int_\Omega fvdx = (u, Tv)_{\mathscr{H}} = B(u, v)$$

即u是(1.3.1)，(1.3.2)在(1.4.4)意义下的弱解．定理证毕。

§5. 用椭圆正则化方法求第一边值问题的解

在边界为Σ的区域Ω内我们考虑方程

$$L(u) = a^{kl}u_{x_kx_l} + b^ku_{x_k} + cu = f,$$
$$a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geqslant 0 \tag{1.5.1}$$

具边界条件

$$u = g, \text{ 在 } \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \text{ 上} \tag{1.5.2}$$

的第一边值问题．我们假设算子 $L(u)$ 的系数及伴随算子 $L^*(u)$ 的系数属于某空间 $C^{(0,\alpha)}(\Omega \cup \Sigma)$，并且假设区域 Ω 属于 $B^{(2,\alpha)}$ 类，$\alpha > 0$． 在本节中，我们用椭圆正则化方法获得问题（1.5.1），(1.5.2)在各种函数空间中的解．

定义 有界可测函数 $u(x)$ 称为第一边值问题(1.5.1),(1.5.2)的弱解，如果对于在 $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$ 类中的任意函数 v，满足积分恒等式

$$\int_\Omega uL^*(v)dx = \int_\Omega vfdx - \int_{\Sigma_3} g\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma + \int_{\Sigma_2} bgvd\sigma \tag{1.5.3}$$

其中 $\partial/\partial\nu = a^{kl}n_k\partial/\partial x_l$，$d\sigma$ 是 Σ 上的曲面面积元素，而 f 和 g 是分别给定在 Ω 和 $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 上的有界可测函数．

下面我们将给出在光滑和分片光滑区域内这种解存在的条件，同时也考虑在空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 中的解(参看上面 § 3)．显然，问题(1.5.1)，(1.5.2) 的每个古典解，既使存在，也是这个问题在积分恒等式(1.5.3)意义下的弱解．对于光滑函数 f 和 g，(1.5.1),(1.5.2) 的弱解将由椭圆型方程

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon\Delta u + L(u) = f, \quad \varepsilon = \text{const} > 0 \tag{1.5.4}$$

具适当边界条件的 Dirichlet 问题的解的极限(当 $\varepsilon \to 0$ 时)得到．

用 Γ 表示集合 $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ 在 Σ 上的边界．我们假设 $a^{kl}_{x_l}$ 在 $\Omega \cup \Sigma$ 上连续．

假设在区域 Ω 的边界 Σ 上某点 P 的邻域内，边界 Σ 的方程具有形式

$$F(x_1, \cdots, x_m) = 0, \ \text{grad}F \neq 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内 } F > 0 \tag{1.5.5}$$

在 Σ 上我们考察 § 1 引入的函数

$$\beta \equiv L(F) \tag{1.5.6}$$

在 Σ^0 的内点(或者内点的极限)并且 $(\partial a^{kj}/\partial n)n_k n_j = 0$ 的点上，函数 β 跟(1.1.3)定义的函数 b(Fichera 函数)只差一个正的因子而相重合。事实上,因为在 Σ^0 上 $a^{kj}F_{x_k} = 0$ 且 $a^{kj}n_j = 0$，推得

$$\begin{aligned}
\beta &= (a^{kj}F_{x_k})_{x_j} + (b^k - a^{kj}_{x_j})F_{x_k} \\
&= \frac{\partial}{\partial n}(a^{kj}F_{x_k})n_j + (F_{x_k}F_{x_k})^{1/2}b \\
&= \frac{\partial a^{kj}}{\partial n}F_{x_k}n_j + a^{kj}n_j\frac{\partial F_{x_k}}{\partial n} + b(F_{x_k}F_{x_k})^{1/2} \\
&= b(F_{x_k}F_{x_k})^{1/2}
\end{aligned}$$

如果在边界 Σ^0 的点 P 的某整个邻域内形式 $a^{kj}\xi_k\xi_j$ 非负定，并且 $a^{kj}_{x_j}$ 连续，那么容易看出在点 P 上，满足条件 $(\partial a^{kj}/\partial \bar{n})n_k n_j = 0$。对于一般情况，在 Σ^0 上 $(\partial a^{kj}/\partial n)n_k n_j \geqslant 0$。

我们用 σ 表示在 Σ^0 上 $\beta \leqslant 0$ 的点集。用 M 表示与 ε 无关的常数。在今后的考虑中，下面的引理是重要的。

引理 1.5.1 假设 $u(x)$ 在 Ω 内满足方程 (1.5.4) 并且 $u \in C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$，在 Σ 上 $u = 0$，$|f| \leqslant M_0$，$c(x) \leqslant -c_0 < 0$，其中 $c_0 = \text{const} > 0$。假设 G 是 Σ 上这样的集合：G 位于 $\Sigma_3 \cup \sigma$ 内，并且在属于 $\bar{G}$ 的 Σ_3 的边界点上 $\beta < 0$。那么，在 G 的点上有

$$|u_{x_j}| \leqslant M_1\varepsilon^{-1/2}, \quad j = 1, \cdots, m \tag{1.5.7}$$

而在 Σ 上的所有点

$$|u_{x_j}| \leqslant M_2\varepsilon^{-1}, \quad j = 1, \cdots, m \tag{1.5.8}$$

证明 假设 $P_0 \subset G$。在 P_0 的邻域内，我们取原点在 P_0 的局部坐标 $y_1, \cdots, y_m$，使得在 P_0 的邻域内，Σ 位于平面 $y_m = 0$ 上，即我们令 $y_k = F^k(x_1, \cdots, x_m)$，$k = 1, \cdots, m$，$F^m = F(x_1, \cdots, x_m)$。假设 $\delta > 0$ 是如此小，使得点集 $Q^0\{\rho^2 = y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2 \leqslant 4\delta^2\}$ 包含在 $\Sigma_3 \cup \sigma$ 内，并且在属于 Q^0 的 Σ_3 的边界点上 $\beta < 0$。我们考虑函数

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \varepsilon^{1/2}, & \rho \leqslant \delta \\ \varepsilon^{1/2}[1 - 27^{-1}(\rho^2 - \delta^2)^3\delta^{-6}], & \delta \leqslant \rho \leqslant 2\delta \end{cases}$$

在区域 $Q_\delta\{0 \leqslant \rho < 2\delta,\ 0 < y_m < \phi(\rho)\}$ 内，我们考虑函数 $w = K_0(e^{-z} - 1)$，其中 $z = K_1(y_m + \varepsilon^{1/2} - \phi)\varepsilon^{-1/2}$。 这里 K_0 和 K_1 是与 ε 无关的常数，将在后面选取。对于变量 $y_1, \cdots, y_m$，方程(1.5.4)取形式

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon\mu^{kj}u_{y_k y_j} + \varepsilon\nu^j u_{y_j} + \alpha^{kj}u_{y_k y_j} + \beta^j u_{y_j} + cu = f \qquad (1.5.9)$$

容易看出，在 Σ 的点上系数 $\beta^m = \beta$。根据定义，在 σ 上 $\beta \leqslant 0$。我们计算 $L_\varepsilon(w)$。有

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(w) = K_0 e^{-z}\Big\{ \varepsilon\Big[& \mu^{mm}K_1^2\varepsilon^{-1} - 2\sum_{j=1}^{m-1}\mu^{mj}K_1^2\phi_{y_j}\varepsilon^{-1} \\ & + \sum_{k,j=1}^{m-1}\mu^{kj}K_1^2\phi_{y_j}\phi_{y_k}\varepsilon^{-1} + \sum_{k,j=1}^{m-1}\mu^{kj}K_1\phi_{y_k y_j}\varepsilon^{-1/2} \\ & - \nu^m K_1\varepsilon^{-1/2} + \sum_{j=1}^{m-1}\nu^j K_1\phi_{y_j}\varepsilon^{-1/2}\Big] \\ & + \Big[\alpha^{mm}K_1^2\varepsilon^{-1} - 2\sum_{j=1}^{m-1}\alpha^{mj}K_1^2\phi_{y_j}\varepsilon^{-1} \\ & + \sum_{k,j=1}^{m-1}\alpha^{kj}K_1^2\phi_{y_k}\phi_{y_j}\varepsilon^{-1}\Big] \\ & + \sum_{k,j=1}^{m-1}\alpha^{kj}K_1\phi_{y_k y_j}\varepsilon^{-1/2} - \beta^m K_1\varepsilon^{-1/2} \\ & + \sum_{j=1}^{m-1}\beta^j K_1\phi_{y_j}\varepsilon^{-1/2} + c\Big\} - cK_0 \end{aligned} \qquad (1.5.10)$$

注意在区域 Q_δ 内有

$$|\phi| \leqslant \varepsilon^{1/2},\quad |\phi_{y_j}| \leqslant M_3\varepsilon^{1/2},\quad |\phi_{y_k y_j}| \leqslant M_4\varepsilon^{1/2} \qquad (1.5.11)$$

在 $\sigma \cap Q^0$ 的点上，系数 $\beta^m \leqslant 0$。 因为由定义，在 $\Sigma^0 \cap Q^0$ 的点(它是 Σ_3 的极限点)上 $\beta < 0$，从而推得在 G_0 内 $\beta^m \leqslant 0$，G_0 为集合 $\sigma \cap Q^0$ 在 Σ 上的某邻域。

因此，在 Q_δ 的子区域 Q_δ^0（Q_δ 在平面 $y_m = 0$ 上的投影属于

G_0）的点上，我们有不等式

$$-\beta^m K_1 \varepsilon^{-1/2} \geqslant -K_1 M_5 \qquad (1.5.12)$$

在 $Q^0 \backslash G_0$ 的点上，显然有 $\alpha^{mm} \geqslant \alpha_0 > 0$，所以对于小的 ε，在 Q_δ 的这些点上（Q_δ 在 $y_m = 0$ 的投影位于 $Q^0 \backslash G_0$ 内），不等式 $\alpha^{mm} \geqslant \alpha_0/2 > 0$ 成立。我们称这种点的集合为 Q_δ^1。在 Q_δ^0 的点上，(1.5.10)中花括号内的项以与 ε 无关的常数为下界。这是因为在这些点上，(1.5.11)和(1.5.12)成立，形式 $a^{kj}\xi_k\xi_j$ 非负，并且第一个方括号内的项大于 $M_6 K_1^2 \varepsilon^{-1}$，其中 $M_6 = \text{const} > 0$。所以，选取 K_1 充分大，我们得到在 Q_δ^0 内 $L_\varepsilon(w) \geqslant c_0 K_0$。

在 Q_δ^1 的点上，对于充分小的 ε，$L_\varepsilon(w)$ 的符号由 $\alpha^{mm} K_1^2 \varepsilon^{-1}$ 项确定，因此在 Q_δ^1 内，$L_\varepsilon(w) \geqslant c_0 K_0$。

选取 K_0 充分大，在 Q_δ 内我们得到

$$L_\varepsilon(w \pm u) \geqslant c_0 K_0 \pm f > 0$$

在 Q_δ 的边界上，如果 K_0 充分大，不等式

$$w \pm u \leqslant 0$$

成立，这是因为 $y_m = 0$ 时，$w \leqslant 0$ 而 $u = 0$，并且对于 $y_m = \phi$ 和充分大的 K_0，$w \leqslant -\max\limits_{\Omega} |u|$。所以，由椭圆型方程(1.5.4)的极大值原理，在 Q_δ 内处处有 $w \pm u \leqslant 0$。因为当 $\rho \leqslant \delta$ 时，在 Σ 上 $w = u = 0$，在这些点上 $(w \pm u)_{y_m} \leqslant 0$，因此，$|u_{y_m}| \leqslant K_0 K_1 \varepsilon^{-1/2}$。在 $\bar{G}$ 的点上，这就足够证明(1.5 7)。

在 Σ 上用类似的步骤可以得到估计(1.5.8)。我们考虑由等式

$$\tilde{\phi}(\rho) = \begin{cases} \varepsilon, & \rho \leqslant \delta \\ \varepsilon[1 - 27^{-1}(\rho^2 - \delta^2)^3 \delta^{-6}], & \delta \leqslant \rho \leqslant 2\delta \end{cases}$$

定义的函数 $\tilde{\phi}(\rho)$。假设 $\tilde{w} = K_0(e^{-\tilde{z}} - 1)$，其中

$$\tilde{z} = K_1(y_m + \varepsilon - \tilde{\phi})\varepsilon^{-1}$$

在区域 $\tilde{Q}_\delta\{0 \leqslant \rho < 2\delta,\ 0 < y_m < \tilde{\phi}(\rho)\}$ 内计算 $L_\varepsilon(\tilde{w})$。我们有

$$L_\varepsilon(\tilde{w}) = K_0 e^{-\tilde{z}} \left\{ \varepsilon \left[\mu^{mm} K_1^2 \varepsilon^{-2} - 2 \sum_{j=1}^{m-1} \mu^{mj} K_1^2 \tilde{\phi}_{y_j} \varepsilon^{-2} \right.\right.$$

$$+\sum_{k,j=1}^{m-1} \mu^{kj}K_1\tilde{\phi}_{y_ky_j}\varepsilon^{-1} + \sum_{k,j=1}^{m-1} \mu^{kj}K_1^2\tilde{\phi}_{y_k}\tilde{\phi}_{y_j}\varepsilon^{-2}$$

$$-\nu^m K_1\varepsilon^{-1} + \sum_{j=1}^{m-1} \nu^j K_1\tilde{\phi}_{y_j}\varepsilon^{-1}\Big]$$

$$+\alpha^{mm}K_1^2\varepsilon^{-2} + \sum_{k,j=1}^{m-1} \alpha^{kj}K_1^2\tilde{\phi}_{y_k}\tilde{\phi}_{y_j}\varepsilon^{-2}$$

$$-2\sum_{j=1}^{m-1} \alpha^{mj}K_1^2\tilde{\phi}_{y_j}\varepsilon^{-2} + \sum_{k,j=1}^{m-1} \alpha^{kj}K_1\tilde{\phi}_{y_ky_j}\varepsilon^{-1}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1} \beta^j K_1\tilde{\phi}_{y_j}\varepsilon^{-1} - \beta^m K_1\varepsilon^{-1} + c\Big\} - cK_0 \qquad (1.5.13)$$

对于小的 ε，方括号内的表示式乘以 ε 后大于 $M_7K_1^2\varepsilon^{-1}$，其中 $M_7=\text{const}>0$；而 (1.5.13) 右端剩下的项可以估计，它以 $M_8K_1\varepsilon^{-1}$ 为下界. 因此，对于充分大的 K_1 和充分小的 ε，有 $L_\varepsilon(\tilde{w})\geqslant c_0K_0$.

其次，在 $\tilde{Q}_\delta$ 内考虑函数 $\tilde{w}\pm u$，跟上面一样，我们得到了在 $\tilde{Q}_\delta$ 内 $\tilde{w}\pm u\leqslant 0$，而在 Σ 上 $|u_{y_m}|\leqslant K_0K_1\varepsilon^{-1}$. 所以不等式 (1.5.8) 成立. 引理证毕.

注 在引理 1.5.1 的条件下，在 Σ_3 的边界的某邻域内，可以用要求 $\beta\leqslant 0$ 来代替在 Σ_3 的边界点上 $\beta<0$ 的假定.

定理 1.5.1 在方程(1.5.1)中，假设 $c(x)\leqslant -c_0<0$，f 是在 Ω 内的有界可测函数，g 是在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上的有界可测函数，而在 $\Sigma_2\cup\Sigma_0$ 的内点上 $\beta\leqslant 0$. 那么，在 Ω 内存在边值问题(1.5.1)，(1.5.2)的弱解，它满足不等式(极大值原理)

$$|u|\leqslant\max\left\{\sup\frac{|f|}{c_0},\ \sup|g|\right\} \qquad (1.5.14)$$

证明 假设 $f_n\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$，当 $n\to\infty$ 时，依 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的范数 $f_n\to f$，并且 $|f_n|\leqslant\sup|f|$；再假设函数 g_n 定义在 $\bar{\Omega}$ 内，$g_n\in C^{(2,\alpha)}(\Omega)$，当 $n\to\infty$ 时，依 $\mathscr{L}_2(\Sigma_2\cup\Sigma_3)$ 的范数 $g_n\to g$，并且 $|g_n|\leqslant\sup_{\Sigma_2\cup\Sigma_3}|g|$. 假设 $u_{\varepsilon,n}$ 是问题

$$L_\varepsilon(u)=f_n,\quad \text{在}\ \Omega\ \text{内},\quad u=g_n,\ \text{在}\ \Sigma\ \text{上} \tag{1.5.15}$$

的解．根据区域 Ω、方程 (1.5.1) 的系数和函数 g_n 及 f_n 的光滑性假定，这样的椭圆型方程问题 (1.5.15) 的解 $u_{\varepsilon,n}$ 存在而且属于 $C^{(2,\alpha)}(\bar{\Omega})$类(参看[81])．由椭圆型方程 (1.5.15) 的解 $u_{\varepsilon,n}$ 的极大值原理，有不等式

$$|u_{\varepsilon,n}|\leqslant \max\left\{\sup\frac{|f|}{c_0},\ \sup|g|\right\} \tag{1.5.16}$$

因为对于 $z_{\varepsilon,n}=u_{\varepsilon,n}-g_n$ 有

$$L_\varepsilon(z_{\varepsilon,n})=f_n-L_\varepsilon(g_n),\quad \text{在}\ \Omega\ \text{内};$$

$$z_{\varepsilon,n}=0,\quad \text{在}\ \Sigma\ \text{上}$$

由此推得对固定的 n，关于 $z_{\varepsilon,n}$ 的引理 1.5.1 成立，因而对 $u_{\varepsilon,n}$ 也成立．假设 $v\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，并且在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 上 $v=0$．应用 Green 公式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n v\,dx=&\int_\Omega \varepsilon\Delta v u_{\varepsilon,n}dx+\int_\Omega L^*(v)u_{\varepsilon,n}dx\\&+\int_\Sigma \varepsilon u_{\varepsilon,n}\frac{\partial v}{\partial\bar{n}}d\sigma+\int_{\Sigma_3} g_n\frac{\partial v}{\partial\bar{\nu}}d\sigma\\&-\int_{\Sigma_2} bg_n v\,d\sigma-\int_{\Sigma_0\cup\Sigma_2}\varepsilon v\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial\bar{n}}d\sigma\end{aligned} \tag{1.5.17}$$

从 (1.5.16) 得到：$\{u_{\varepsilon,n}\}$ 在 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 是弱紧的．假设当 $\varepsilon_k\to 0$ 时，子序列 $u_{\varepsilon_k,n}$ 在空间 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 内弱收敛于 u_n．在(1.5.17)中令 $\varepsilon_k\to 0$ 取极限，我们得到 u_n 满足积分恒等式

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_n L^*(v)dx=&\int_\Omega f_n v\,dx\\&-\int_{\Sigma_3} g_n\frac{\partial v}{\partial\bar{\nu}}d\sigma+\int_{\Sigma_2} bg_n v\,d\sigma\end{aligned} \tag{1.5.18}$$

当 $\varepsilon_k\to 0$ 时，(1.5.17)的最后一个积分趋于 0．这是很容易看出的，因为在集合 $\Sigma_0\cup\Sigma_2$ 的边界 Γ 的 δ 邻域 Γ^δ 内，对于固定的 n，导数 $\partial u_{\varepsilon,n}/\partial\bar{n}$ 可以用不等式(1.5.8) 估计，这是因为在 Γ 上 $v=0$，而且 Σ 的面积是有限的；又因为在 $(\Sigma_0\cup\Sigma_2)\setminus\Gamma^\delta$ 上满足条件 $\beta\leqslant 0$，所以在 $(\Sigma_0\cup\Sigma_2)\setminus\Gamma^\delta$ 上，对于 $u_{\varepsilon,n}$ (1.5.7)成立．因此，选取 δ

和 ε 充分小，可以使这个积分任意小.

从序列 $\{u_n\}$ 中我们选取当 $n_k\to\infty$ 时，在 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 弱收敛于 u 的子序列. 于是，当 $n_k\to\infty$ 时在积分恒等式 (1.5.18) 中取极限，我们得到定理的断言. 从函数 $u_{\varepsilon,n}$ 的不等式 (1.5.16) 推得对函数 u 的估计(1.5.14).

定理 1.5.2 如果函数 g 在 Σ 上 $\Sigma_3\cup\Sigma_2$ 的邻域内连续. 则定理1.5.1中所构造的弱解在 Σ_3 和 Σ_2 的点(它们是 Σ_2 的内点或内点的极限)上连续，并且取给定值 g.

证明 假设 P_0 是 $\Sigma_3\cup\Sigma_2$ 的一点. 在点 P_0 的邻域内，我们利用局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$ 来变换方程 (1.5.4)；选取这个坐标系使得 Σ 位于平面 $y_m=0$ 上，并且在 Ω 内 $y_m>0$. 假设方程(1.5.4)对新坐标取形式(1.5.9). 在点 P_0 的邻域内，对 $y_m\geqslant 0$ 考虑函数

$$w=y_m^\gamma+\sum_{j=1}^{m-1}y_j^2,\quad \gamma=\mathrm{const},\quad 0<\gamma<1$$

容易看出，如果 P_0 是 Σ_3 的点，那么，在 P_0 的某邻域内对于 $y_m>0$，有

$$\begin{aligned}L_\varepsilon(w)=\varepsilon\mu^{mm}\gamma(\gamma-1)y_m^{\gamma-2}&+\varepsilon\sum_{j=1}^{m-1}2\mu^{jj}\\&+\varepsilon\nu^m\gamma y_m^{\gamma-1}+\varepsilon\sum_{j=1}^{m-1}\nu^j 2y_j\\&+\alpha^{mm}\gamma(\gamma-1)y_m^{\gamma-2}\\&+2\sum_{j=1}^{m-1}\alpha^{jj}+\gamma\beta^m y_m^{\gamma-1}\\&+\sum_{j=1}^{m-1}\beta^j 2y_j+cw<0\end{aligned}$$

因为对充分小的 y_m，$L_\varepsilon(w)$ 的符号由 $\alpha^{mm}\gamma(\gamma-1)y_m^{\gamma-2}$ 这一项确定. 如果 P_0 是 Σ_2 的内点或者是 Σ_2 的内点的极限，那么，根据 Σ_2 的定义，在这点上 $\beta^m-\alpha^{mm}_{y_m}<0$，而在 P_0 的某邻域内，对于 $y_m>0$ 取充分小的 ε，$L_\varepsilon(w)$ 的符号由 $\alpha^{mm}\gamma(\gamma-1)y_m^{\gamma-2}+\gamma\beta^m y_m^{\gamma-1}$

的项确定。因为 $\alpha^{mm}=\alpha^{mm}_{y_m}y_m+O(y_m^2)$，并且

$$\alpha^{mm}_{y_m}\gamma(\gamma-1)y_m^{\gamma-1}+\gamma\beta^m y_m^{\gamma-1}=\gamma(\beta^m-\alpha^{mm}_{y_m}+\gamma\alpha^{mm}_{y_m})y_m^{\gamma-1}$$

如果 $\gamma>0$ 充分小，则这些项形成小于 0 的量。我们可以假设在 P_0 的邻域内，当 $n\to\infty$ 时 g_n 在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上一致收敛于 g。假设 $u_{\varepsilon,n}$ 是问题 (1.5.15) 的解。在区域 $G_\rho\{\Sigma_{j=1}^m y_j^2<\rho,\ y_m>0\}$ 内考虑函数

$$V_\pm=\mp g_n(P_0)+\delta\pm u_{\varepsilon,n}+C_1w;\quad C_1,\ \delta=\text{const}>0$$

如果常数 C_1 充分大，那么在这区域内

$$L_\varepsilon(V_\pm)=c(\mp g_n(P_0)+\delta)\pm f_n+C_1L_\varepsilon(w)<0$$

在 G_ρ 的位于 $y_m=0$ 的边界上有 $V_\pm\geqslant 0$，这是因为 $C_1w\geqslant 0$，并且当 ρ 充分小时，对于 $y_m=0$ 和充分大的 n，有 $\pm[u_{\varepsilon,n}-g_n(P_0)]+\delta>0$。因为由 (1.5.16)，$u_{\varepsilon,n}$ 关于 ε 和 n 一致有界，从而推得，如果 C_1 充分大，那么对于 $\Sigma_{j=1}^m y_j^2=\rho$，不等式 $V_\pm>0$ 成立。按极大值原理，在 G_ρ 内，$V_\pm>0$，即在 G_ρ 内有

$$-C_1w-\delta\leqslant u_{\varepsilon,n}-g_n(P_0)\leqslant C_1w+\delta \qquad (1.5.19)$$

其中常数 C_1，δ 和 ρ 都跟 ε 或 n 无关。显然，这些不等式对于 $u_{\varepsilon,n}$ 在 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的弱极限 $u(x)$ 同样成立。因此，从(1.5.19)得出极限函数 $u(x)$ 在 P_0 的连续性。定理证毕。

现在我们证明 (1.5.1)，(1.5.2) 在空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 中弱解的存在定理。

定理 1.5.3 设 (1.5.1) 的系数在 $\Omega\cup\Sigma$ 内满足 $c(x)<0$，$f\in\mathscr{L}_p(\Omega)$，在 $\Omega\cup\Sigma$ 内，$c^*\equiv a^{kj}_{x_kx_j}-b^k_{x_k}+c<0$，而且在 $\Sigma_2\cup\Sigma_0$ 的内点上 $\beta\leqslant 0$。那么，在 Ω 内存在 $g=0$ 的边值问题 (1.5.1) 和 (1.5.2) 在空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的弱解，即存在一个函数 $u(x)\in\mathscr{L}_p(\Omega)$，$1\leqslant p<\infty$，对于 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 中的任意函数 v 满足积分恒等式

$$\int_\Omega uL^*(v)dx=\int_\Omega vfdx \qquad (1.5.20)$$

对此弱解有估计

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant\frac{p}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[-c^*+(1-p)c]}\|f\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \qquad (1.5.21)$$

如果在 $\Omega\cup\Sigma$ 内条件 $c^*<0$ 不成立,则对于在 $\Omega\cup\Sigma$ 上,使得 $-c^*+(1-p)c\geqslant 0$ 成立的充分大的 $p,g=0$ 的(1.5.1),(1.5.2)的弱解存在.

证明 我们用类似于证定理 1.5.1 的方法来证明这个定理.函数 f 用 $C^{(1)}(\Omega\cup\Sigma)$ 的函数 f_n 按 $\mathscr{L}_p(\Omega)$的范数逼近.假设 $u_{\varepsilon,n}$ 是问题

$$L_\varepsilon(u)=f_n,\qquad 在\,\Omega\,内;\qquad u_{\varepsilon,n}=0,\ 在\,\Sigma\,上$$

的解.函数 $u_{\varepsilon,n}$ 按 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的范数对 ε 和 n 一致有界.这可以从定理 1.2.1 中所证的(1.2.7)推得.从 $u_{\varepsilon,n}$ 在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的范数的一致有界性得出这族函数在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的弱紧性.当 $\varepsilon_k\to 0$ 时选取弱收敛子序列 $u_{\varepsilon_k,n}$,在(1.5.17)中对 $\varepsilon_k\to 0$ 取极限,并且注意 $g_n=0$,像定理 1.5.1 的证明那样,我们得到极限函数 $u_n(x)$ 满足积分恒等式(1.5.18).对于 $u_n(x)$ 从(1.2.7)推得,估计

$$\|u_n\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant\frac{p}{\min\limits_{\Omega\cup\Sigma}[-c^*+(1-p)c]}\|f_n\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}$$

成立.此外,从函数族 $\{u_n\}$ 中选取 $n_k\to\infty$ 时在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 中的弱收敛子序列,并且在等式

$$\int_\Omega L^*(v)u_n dx=\int_\Omega vf_n dx$$

中对这串子序列取极限,我们得到极限函数 u 满足积分恒等式(1.5.20).显然 $u(x)$ 也满足(1.5.21).

椭圆正则化方法同样可以用来获得 $g=0$ 的问题(1.5.1)和(1.5.2)在空间 $\mathscr{H}$ 的弱解.在 §4 中已构造过这种弱解.

定理 1.5.4 假设 $f\in\mathscr{L}_2(\Omega)$,并且假设在区域 Ω 内,满足不等式

$$\frac{1}{2}b^l_{x_l}-\frac{1}{2}a^{kj}_{x_kx_j}-c\geqslant\text{const}>0$$

在 $\Sigma_2\cup\Sigma_0$ 的内点上 $\beta\leqslant 0$.那么,在 §4 中所构造的空间 $\mathscr{H}$ 中,存在一个函数 u,它对于 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于 0 的任意函数 $v\in C^{(1)}(\Omega\cup\Sigma)$ 满足(1.4.4).这个解是问题

$$L_\varepsilon(u)=f_n,\ \text{在}\ \Omega\ \text{内};\quad u=0,\ \text{在}\ \Sigma\ \text{上}$$

的光滑解序列 $u_{\varepsilon,n}$ 当 $\varepsilon\to 0$，$n\to\infty$ 时在 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的弱极限，其中 $f_n\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，并且在 $n\to\infty$ 时依 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的范数

$$f_n\to f.$$

证明 假设 $v\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，并且在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上 $v=0$. 分部积分后并注意在区域 Ω 的边界 Σ 上 $u_{\varepsilon,n}$ 的边界条件，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega vL_\varepsilon(u_{\varepsilon,n})dx\\
&\quad=-\int_\Omega [a^{kj}v_{x_k}u_{\varepsilon,nx_j}+u_{\varepsilon,n}(b^k-a^{kj}_{x_j})v_{x_k}\\
&\qquad+(b^k_{x_k}-a^{kj}_{x_kx_j}-c)u_{\varepsilon,n}v]dx\\
&\qquad+\int_\Omega \varepsilon u_{\varepsilon,n}\Delta v dx-\int_{\Sigma_0\cup\Sigma_2}\varepsilon\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial\bar{n}}vd\sigma\\
&\quad=\int_\Omega vf_n dx
\end{aligned}\tag{1.5.22}$$

其中，$\bar{n}$ 是边界 Σ 的内法线方向. 因此我们有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega vf_n dx=B(u_{\varepsilon,n},v)+\varepsilon\int_\Omega u_{\varepsilon,n}\Delta v dx\\
-\int_{\Sigma_0\cup\Sigma_2}\varepsilon\frac{\partial u_{\varepsilon,n}}{\partial\bar{n}}vd\sigma
\end{aligned}\tag{1.5.23}$$

在 (1.5.22) 中用 $u_{\varepsilon,n}$ 代替 v，并且分部积分，得到

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{\varepsilon,n}f_n dx=-\int_\Omega \Big[a^{kj}u_{\varepsilon,nx_k}u_{\varepsilon,nx_j}\\
+\left(\frac{1}{2}b^k_{x_k}-\frac{1}{2}a^{kj}_{x_kx_j}-c\right)u^2_{\varepsilon,n}\Big]dx\\
-\int_\Omega \varepsilon u_{\varepsilon,nx_k}u_{\varepsilon,nx_k}dx
\end{aligned}\tag{1.5.24}$$

从 (1.5.24) 得出 $u_{\varepsilon,n}$ 在 $\mathscr{H}$ 的范数下对 ε 和 n 一致有界，即

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [a^{kj}u_{\varepsilon,nx_k}u_{\varepsilon,nx_j}+u^2_{\varepsilon,n}]dx\\
+\varepsilon\int_\Omega u_{\varepsilon,nx_k}u_{\varepsilon,nx_k}dx\leqslant C\|f_n\|^2_{\mathscr{L}_2}
\end{aligned}$$

其中，C 不依赖于 ε 或 n. 这表示存在一串序列 $u_{\varepsilon_k,n}$，当 $\varepsilon_k\to 0$

时，在空间 $\mathscr{H}$ 中弱收敛于函数 $u_n(x)$. 在等式 (1.5.23) 中对 $\varepsilon_k \to 0$ 取极限，对于 $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$ 上 $v=0$ 的任意函数 $v \in C^{(1)}(\Omega \cup \Sigma)$，我们得到

$$\int_\Omega v f_n dx = B(u_n, v) \tag{1.5.25}$$

像定理 1.5.1 的证明那样，当 $\varepsilon \to 0$ 时，(1.5.23) 的最后一个积分趋于 0. 现在选取序列 $\{u_n\}$ 的(在 $\mathscr{H}$ 中) 弱收敛子序列，并对 $n_k \to \infty$ 时，在 (1.5.25) 中取极限，我们得到极限函数 $u(x)$ 满足所要求的恒等式 (1.4.4). 定理证毕.

对于(1.1.1)类型的方程，在分片光滑边界的区域中，考虑问题(1.1.4)，(1.1.5) 是饶有兴趣的. 例如，对于抛物型方程，通常在柱体内研究问题(1.1.4)，(1.1.5)，它是这种区域的一个例子. 为了简单起见，我们将在 $B^{(2,\alpha)}$ 类分片光滑区域 Ω 内，考察条件 (1.1.5) 中 $g=0$ 的问题 (1.1.4)，(1.1.5).

如果在区域 Ω 的边界 Σ 的点 P 的某邻域内，曲面 Σ 对于某个 k 可表示为形式

$$x_k = f_k(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_m)$$

其中 $f_k \in C^{(2,\alpha)}$，$0<\alpha<1$，则称点 P 为 Σ 的光滑点.

将 Σ 上不满足这个条件的点集记为 B.

在区域 $\Omega \in B^{(2,\alpha)}$ 内，有界可测函数 $u(x)$ 称为 $g=0$ 的 (1.1.4)，(1.1.5) 的弱解，若对于在 $\Sigma_1 \cup \Sigma_3 \cup B$ 上等于 0 的任意 $v \in C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$ 满足积分恒等式

$$\int_\Omega u L^*(v) dx = \int_\Omega v f dx \tag{1.5.26}$$

其中，f 是在 Ω 内给定的有界可测函数.

定理 1.5.5 假设区域 Ω 的边界 Σ 属于 $B^{(2,\alpha)}$ 类，f 是 Ω 内的有界可测函数，$g=0$，在 Ω 内 $c(x) \leqslant -c_0 < 0$，并且在 $\Sigma_2 \cup \Sigma_0$ 的内点上 $\beta \leqslant 0$. 那么在 Ω 内存在边值问题(1.1.4)，(1.1.5)的弱解 $u(x)$，满足不等式(极大值原理)

$$|u| \leqslant \sup \frac{|f|}{c_0} \tag{1.5.27}$$

证明 这个定理的证明方法类似于定理1.5.1的证明. 我们做一串区域 Ω_δ, 使得在集合 B 的 δ 邻域外,所有的区域 Ω_δ 跟 Ω 重合,每个 Ω_δ 属于 $A^{(2,\alpha)}$ 类, 并且 $\Omega_\delta\subset\Omega$. 假设 $u^\delta_{\varepsilon,n}$ 是椭圆型方程

$$L_\varepsilon(u)=f_n, \text{ 在 } \Omega_\delta \text{ 内}$$

在 Ω_δ 的边界 Σ^δ 上,具有条件 $u^\delta_{\varepsilon,n}=0$ 的 Dirichlet 问题的解,其中 $f_n\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$, $|f_n|\leqslant\sup|f|$, 并且在 $n\to\infty$ 时,依 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的范数 $f_n\to f$. 我们在区域 Ω 内对函数 $u^\delta_{\varepsilon,n}$ 和 $v\varphi_\delta$ 应用 Green 公式,其中 φ_δ 是无穷次可微函数, 它在集合 B 的 δ 邻域内等于 0, 而在这个集合的 2δ 邻域外等于 1. 考虑到在 Σ^δ 上 $u^\delta_{\varepsilon,n}=0$ 的事实,我们得到

$$\int_\Omega f_n v\varphi_\delta dx=\int_\Omega \varepsilon\Delta(v\varphi_\delta)u^\delta_{\varepsilon,n}dx+\int_\Omega L^*(v\varphi_\delta)u^\delta_{\varepsilon,n}dx-\int_{\Sigma_0\cup\Sigma_2}\varepsilon v\varphi_\delta\frac{\partial u^\delta_{\varepsilon,n}}{\partial\vec{n}}d\sigma \tag{1.5.28}$$

显然,对于函数 $u^\delta_{\varepsilon,n}$, 估计

$$|u^\delta_{\varepsilon,n}|\leqslant\sup\frac{|f|}{c_0}$$

成立. 我们从序列 $u^\delta_{\varepsilon,n}$ 中, 取出 $\varepsilon_k\to0$ 时弱收敛于 u^δ_n 的子序列. 当 $\varepsilon_k\to0$ 时,在 (1.5.28) 中取极限,得到

$$\int_\Omega f_n v\varphi_\delta dx=\int_\Omega L^*(v\varphi_\delta)u^\delta_n dx \tag{1.5.29}$$

假设当 $n_k\to\infty$ 时, $u^\delta_{n_k}\to u^\delta$ 在空间 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 是弱收敛的. 显然,从 (1.5.29) 有

$$\int_\Omega fv\varphi_\delta dx=\int_\Omega L^*(v\varphi_\delta)u^\delta dx \tag{1.5.30}$$

我们证明了,如果对于 δ 选取子序列 δ_k 使得当 $\delta_k\to0$ 时, u^{δ_k} 在空间 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 中弱收敛于 u, 则在 (1.5.30) 中最后面的积分趋于 $\int_\Omega L^*(v)udx$. 我们有

$$\int_\Omega L^*(v\varphi_\delta)u^\delta dx = \int_\Omega L^*(v)u^\delta\varphi_\delta dx$$
$$+ 2\int_\Omega a^{kl}v_{x_k}\varphi_{\delta x_l}u^\delta dx$$
$$+ \int_\Omega (L^*(\varphi_\delta) - c^*\varphi_\delta)u^\delta v dx \qquad (1.5.31)$$

我们注意到：在(1.5.31)中后两个积分的积分域实际上是取在集合B的2δ邻域上，因为在这邻域外，这些积分的被积函数等于0。B的这个2δ邻域的测度不大于$M\delta^2$。因为在B的点上$v=0$，

$$|\varphi_{\delta x_l}| = O(\delta^{-1}), \qquad |\varphi_{\delta x_k x_l}| = O(\delta^{-2}),$$

而且u^δ关于δ一致有界，因此，当$\delta\to 0$时，后面两个积分趋于0。于是，在(1.5.31)中当$\delta\to 0$时取极限，我们得到：函数$u(x)$满足(1.5.26)，因而是(1.1.4)，(1.1.5)的弱解。定理证毕。

如果$f\in\mathscr{L}_p(\Omega)$，在$B^{(2,\alpha)}$类区域$\Omega$内，同样可以构造问题(1.1.4)，(1.1.5)在空间$\mathscr{L}_p(\Omega)$中的弱解。

§6. 第一边值问题弱解的唯一性定理

在§3—§5，我们在各种函数空间构造边值问题(1.1.4)，(1.1.5)的弱解。本节我们给出(1.1.4)，(1.1.5)弱解唯一性的充分条件，并且举出不满足这些条件与问题的弱解不唯一的例子。

唯一性定理的证明基于伴随方程的椭圆正则化方法。

我们先从几个辅助命题开始。

引理 1.6.1 假设$v(x)$在$A^{(2,\alpha)}$类区域Ω内满足方程

$$\varepsilon\Delta v + L(v) = f, \quad \varepsilon = \text{const} > 0 \qquad (1.6.1)$$

及条件

$$v|_\Sigma = 0 \qquad (1.6.2)$$

其中$v\in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，$a^{kl}\in C_{(2)}(\Omega)$，$b^l\in C_{(1)}(\Omega)$，$c\in C_{(0)}(\Omega)$，$f\in C_{(0)}(\Omega)$。假设在$\Omega\cup\Sigma$内，或者

$$c - \frac{1}{2}b^k_{x_k} + \frac{1}{2}a^{kl}_{x_k x_l} < \text{const} < 0$$

$$\text{或者 } c < \text{const} < 0 \tag{1.6.3}$$

在边界 Σ 上，设

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant C_1\varepsilon^{-1/2},\ C_1 = \text{const},\ i = 1, \cdots, m \tag{1.6.4}$$

这里 C_1 不依赖于 ε. 那么

$$\int_\Omega \varepsilon^2(\Delta v)^2 dx \leqslant C_2 \tag{1.6.5}$$

而常数 C_2 也不依赖于 ε。

证明 用 v 乘方程(1.6.1)并在 Ω 上积分，分部积分后，得到

$$\int_\Omega \varepsilon v_{x_k} v_{x_k} dx + \int_\Omega a^{kl} v_{x_k} v_{x_l} dx - \int_\Omega \left[c - \frac{1}{2} b^l_{x_l} + \frac{1}{2} a^{kl}_{x_k x_l}\right] v^2 dx = -\int_\Omega f v dx \tag{1.6.6}$$

如果 $c < 0$，那么由于极大值原理，函数 v 关于 ε 一致有界. 因此，如果条件 (1.6.3) 满足，则从 (1.6.6) 得出

$$\varepsilon \int_\Omega v_{x_k} v_{x_k} dx + \int_\Omega a^{kl} v_{x_k} v_{x_l} dx + \int_\Omega v^2 dx \leqslant C_3 \int_\Omega f^2 dx \tag{1.6.7}$$

这里以及下面都用 C_i 表示不依赖于 ε 的常数。

用 $\varepsilon\Delta v$ 乘 (1.6.1) 并在 Ω 上积分，则有

$$\int_\Omega \varepsilon^2(\Delta v)^2 dx + \int_\Omega \varepsilon \Delta v a^{kl} v_{x_k x_l} dx = \int_\Omega (f - cv - b^l v_{x_l}) \varepsilon \Delta v dx \tag{1.6.8}$$

容易看出，

$$\left|\int_\Omega \varepsilon \Delta v (f - cv) dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon^2 (\Delta v)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (f - cv)^2 dx$$

根据假设，在Ω的边界点上(1.6.4)成立. 因此，考虑到(1.6.7)和(1.6.4)，并且分部积分，我们得到

$$\left|\int_\Omega \varepsilon b^l v_{x_l} v_{x_k x_k} dx\right| \leqslant \left|\int_\Omega \varepsilon b^l v_{x_l x_k} v_{x_k} dx\right.$$

$$+ \int_\Omega \varepsilon b^l_{x_k} v_{x_l} v_{x_k} dx + \left.\int_\Sigma \varepsilon b^l v_{x_k} v_{x_l} n_k d\sigma\right|$$

$$\leqslant \left|-\int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon b^l_{x_l} v_{x_k} v_{x_k} dx + \int_\Omega \varepsilon b^l_{x_k} v_{x_l} v_{x_k} dx\right|$$

$$+ \left|\int_\Sigma \left[\varepsilon b^l v_{x_l} v_{x_k} n_k - \frac{1}{2}\varepsilon b^l v_{x_k} v_{x_k} n_l\right] d\sigma\right| \leqslant C_4$$

这里跟通常一样，$n=(n_1,\cdots,n_m)$ 是Σ的内法线单位向量。

其次，由分部积分，得到

$$\int_\Omega \varepsilon v_{x_s x_s} a^{kl} v_{x_k x_l} dx = -\int_\Omega \varepsilon v_{x_s} a^{kl} v_{x_k x_l x_s} dx$$

$$-\int_\Omega \varepsilon v_{x_s} a^{kl}_{x_s} v_{x_k x_l} dx - \int_\Sigma \varepsilon a^{kl} v_{x_s} v_{x_k x_l} n_s d\sigma$$

$$= \int_\Omega \varepsilon a^{kl} v_{x_s x_k} v_{x_s x_l} dx$$

$$+ \int_\Omega [\varepsilon a^{kl}_{x_l} v_{x_s} v_{x_s x_k} - \varepsilon a^{kl}_{x_s} v_{x_s} v_{x_l x_k}] dx$$

$$+ \int_\Sigma [\varepsilon a^{kl} v_{x_s} v_{x_k x_s} n_l - \varepsilon a^{kl} v_{x_s} v_{x_k x_l} n_s] d\sigma$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 \tag{1.6.9}$$

我们注意，积分 I_1 非负. 下面我们来估计 I_2，有

$$\left|\int_\Omega \varepsilon a^{kl}_{x_l} v_{x_s} v_{x_s x_k} dx\right|$$

$$= \left|\int_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon a^{kl}_{x_l x_k} v_{x_s} v_{x_s} dx + \int_\Sigma \frac{1}{2}\varepsilon a^{kl}_{x_l} v_{x_s} v_{x_s} n_k d\sigma\right|$$

$$\leqslant C_5 \tag{1.6.10}$$

用完全一样的方法，得到

$$\left|\int_\Omega \varepsilon a^{kl}_{x_s} v_{x_s} v_{x_k x_l} dx\right| = \left|\int_\Omega \varepsilon a^{kl}_{x_s} v_{x_s x_k} v_{x_l} dx\right.$$

$$+\int_{\Omega}\varepsilon a^{kl}_{x_s x_k} v_{x_s} v_{x_l} dx$$

$$+\int_{\Sigma}\varepsilon a^{kl}_{x_s} v_{x_s} v_{x_l} n_k d\sigma \Big| \tag{1.6.11}$$

由 (1.6.4) 和 (1.6.7)，最后两个积分关于 ε 一致有界．我们将 (1.6.11)右端的第一个积分写成形式

$$\int_{\Omega}\frac{1}{2}\varepsilon a^{kl}_{x_s}(v_{x_k}v_{x_l})_{x_s}dx = -\int_{\Omega}\frac{1}{2}\varepsilon a^{kl}_{x_s x_s} v_{x_k} v_{x_l} dx$$

$$-\int_{\Sigma}\frac{1}{2}\varepsilon a^{kl}_{x_s} v_{x_k} v_{x_l} n_s d\sigma$$

由此及(1.6.10),(1.6.11)得出 $|I_2|\leqslant C_6$.

为了估计 I_3，我们将 Σ 划分成为分片 Σ^t，$t=1,\cdots,N$，并且在 Σ^t 的邻域内引进局部坐标

$$y_k = F^k(x_1,\cdots,x_m),\quad k=1,\cdots,m$$

使得边界 Σ^t 位于平面 $y_m=0$ 上．因为在 Σ 上 $v=0$，所以有

$$I_3=\int_{\cup\Sigma^t}\varepsilon a^{kl} v_{y_m} F^m_{x_s} F^m_{x_l}(v_{y_m y_m} F^m_{x_k} F^m_{x_s} + v_{y_m y_l} F^m_{x_k} F^l_{x_s}$$

$$+ v_{\cdot m} F^m_{x_k x_s})\kappa dy_1\cdots dy_{m-1}$$

$$-\int_{\cup\Sigma^t}\varepsilon a^{kl} v_{y_m} F^m_{x_s} F^m_{x_s}(v_{y_m y_m} F^m_{x_k} F^m_{x_l}$$

$$+ v_{y_m y_l} F^m_{x_k} F^l_{x_l} + v_{y_m} F^m_{x_k x_l})\kappa dy_1\cdots dy_{m-1}$$

$$= -\int_{\cup\Sigma^t}\frac{1}{2}\varepsilon a^{kl}(v^2_{y_m})_{y_l}[F^m_{x_k} F^l_{x_l} F^m_{x_s} F^m_{x_s}$$

$$- F^m_{x_k} F^l_{x_s} F^m_{x_s} F^m_{x_l}]\kappa dy_1\cdots dy_{m-1}$$

$$-\int_{\cup\Sigma^t}\varepsilon a^{kl}(v_{y_m})^2 F^m_{x_s}[F^m_{x_s} F^m_{x_k x_l}$$

$$- F^m_{x_l} F^m_{x_k x_s}]\kappa dy_1\cdots dy_{m-1} \tag{1.6.12}$$

这里，$l\neq m$，κ 是某有界函数，并假设关于 l 从 1 到 $m-1$ 求和，而其余的重复指标从 1 到 m 求和．在 (1.6.12) 中，最后的两个积分关于 ε 一致有界．这容易用分部积分变换第一个积分并利用(1.6.4)来证明．因而引理 1.6.1 证毕．

假设在点 P 的邻域内，边界 Σ 由方程

$$F(x_1, \cdots, x_m) = 0, \ F \in C^{(2)}$$

给定，其中 $\operatorname{grad} F$ 在 Σ 上不为 0，并且与内法线 n 同向。在 Σ^0 的点上，我们考虑函数

$$\beta^* = L^*(F) \tag{1.6.13}$$

在 § 5 中已经证明：如果在 Σ^0 的内点及 Σ^0 的内点的极限点上，

$$(\partial/\partial \bar{n})(a^{kl} F_{x_k} F_{x_l}) = 0,$$

则函数 β^* 与算子 L^* 的 Fichera 函数 (1.1.3) 同号。

定理 1.6.1 假设在 $\Omega \cup \Sigma$ 内 $c^* < 0$，又假设在 Σ_1 的点上 $\beta^* < 0$，而且 $\Omega \in A^{(2,\alpha)}$。假设方程 $L^*(v) = a^{kl} v_{x_k x_l} + b^{*k} v_{x_k} + c^* v = 0$ 的系数可以延拓到集合 $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ 的 δ 邻域 G_δ 内，使得在 $\overline{\Omega \cup G_\delta}$ 内 $a^{kl}\xi_k\xi_l \geqslant 0$，而 $a^{kl} \in C_{(2)}(\Omega \cup G_\delta)$，$b^{*k} \in C_{(1)}(\Omega \cup G_\delta)$，$c^* \in C^{(0,\alpha)}(\overline{\Omega \cup G_\delta})$，$0 < \alpha < 1$。那么，空间 $\mathscr{L}_2(\Omega)$ 的函数 $u(x)$ 在 Ω 内几乎处处等于 0，如果对在 $\Sigma_3 \cup \Sigma_1$ 上等于 0 的任意 $v \in C^{(2)}(\Omega)$，

$$\int_\Omega L^*(v) u dx = 0 \tag{1.6.14}$$

又如果 $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ 在 Σ 上的边界点的集合 Γ 可划分为互不相交的闭子集 Γ_1，Γ_2，Γ_3（特别是任何 Γ_i 可能为空集），使满足下列条件：

1）在 Γ_1 的每点的某邻域内，集合 Γ_1 位于曲面 $F(x_1, \cdots, x_m) = 0$（定义 Σ）和曲面 $\Psi(x_1, \cdots, x_m) = 0$ 的交集上，函数 F 和 Ψ 属于 $C^{(2)}$ 类，并且在 Γ_1 上，Σ 的法向量 n 不正交于曲面 $\Psi = 0$。在集合 Γ_1 的某邻域 Q 内，函数 $u(x)$ 属于 $\mathscr{L}_3(Q)$ 类。

2）在 Γ_2 的每点的某邻域内，集合 Γ_2 位于曲面 $F = 0$（定义 Σ）和 $\Psi = 0$ 的交集上，其中 $F, \Psi \in C^{(2)}$，而且向量 $\bar{n}$ 不正交于曲面 $\Psi = 0$。在 Γ_2 的点上

$$a^{kl} \Psi_{x_k} \Psi_{x_l} = 0$$

3）Γ_3 在 Σ 上的 δ 邻域的面积为 δ^q 阶，这里 $q \geqslant 2$。

证明 我们构造区域 Ω_δ，使得 $\Omega_\delta \subset \Omega \cup G_\delta$ 并且 $\Omega_\delta \supset \Omega$。假设区域 Ω_δ（其边界为 Σ^δ）属于 $A^{(2,\alpha)}$ 类，$0 < \alpha < 1$，而且集合

$\Sigma_3\cup\Sigma_0$ 在 Ω_δ 内. 我们记集合 Γ 的 δ 邻域为 Γ^δ. 假设 $a(x)\in C^{(2,\alpha)}(\bar{\Omega}_\delta)$，在 Ω 内 $a=0$，在 $\bar{\Omega}_\delta\setminus\bar{\Omega}$ 内 $a>0$. 假设 v^1 在 Ω_δ 内，满足方程

$$\varepsilon\Delta v^1+L^*(v^1)+a\Delta v^1=\Phi,\quad \varepsilon>0 \tag{1.6.15}$$

及条件

$$v^1=0,\quad 在\ \Sigma^\delta\ 上 \tag{1.6.16}$$

其中 $\Phi\in C_0^\infty(\Omega)$. 我们注意，在边界 Σ^δ 且不属于 Σ 的那部分上，$a^{kl}n_kn_l+an_ln_l\neq 0$. 在 Σ 且属于 Σ^δ 的点上或者 $a^{kl}n_kn_l\neq 0$ 或者 $\beta^*<0$. 因此，对于算子 $L^*(v)+a\Delta v$ 应用引理 1.5.1，我们得到：对于 v^1 不等式

$$\left|\frac{\partial v^1}{\partial x_i}\right|\leqslant C_1\varepsilon^{-1/2},\quad 在\ \Sigma^\delta\ 上$$

成立，其中常数 C_1 不依赖于 ε. 由此及引理 1.6.1 得出：对于 v_1 的估计(1.6.5)成立. 假设 $\varphi^\delta(x)$ 是这样的函数：

$$\varphi^\delta\in C^{(2)}(\overline{\Omega\cup G_\delta}),\ 在\ \Gamma^\delta\ 内\ \varphi^\delta=0,\ 在\ \gamma^\delta\ 外\ \varphi^\delta=1$$

其中 $0\leqslant\varphi^\delta\leqslant 1$，$\gamma^\delta$ 是 Γ 的邻域：它包含 Γ^δ，并且若选取 δ 充分小，则 $\Omega\setminus\gamma^\delta$ 包含 Ω 中的任意给定的闭区域.

函数 $v=v^1\varphi^\delta$ 可以代入恒等式(1.6.14)，由于在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上 $v=0$. 我们有

$$\begin{aligned}0&=\int_\Omega L^*(v^1\varphi^\delta)u\,dx\\&=\int_\Omega\varphi^\delta L^*(v^1)u\,dx+\int_\Omega v^1(L^*(\varphi^\delta)-c^*\varphi^\delta)u\,dx\\&\quad+\int_\Omega 2a^{kl}\varphi^\delta_{x_k}v^1_{x_l}u\,dx\end{aligned}$$

利用(1.6.15)，由此得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega\varphi^\delta\Phi u\,dx&=\int_\Omega\varepsilon\varphi^\delta\Delta v^1u\,dx\\&\quad-\int_\Omega v^1(L^*(\varphi^\delta)-c^*\varphi^\delta)u\,dx\\&\quad-\int_\Omega 2a^{kl}\varphi^\delta_{x_k}v^1_{x_l}u\,dx\end{aligned}\tag{1.6.17}$$

因为$\Phi\in C_0^\infty(\Omega)$,从而得出对充分小的$\delta$,有$\Phi\varphi^\delta=\Phi$,而(1.6.17)左端的积分跟积分$\int_\Omega\Phi u dx$重合．我们证明：对于充分小的$\delta$和$\varepsilon(\delta)$，(1.6.17)的右端可以任意小．这表示对紧支集上的任何光滑函数Φ,此方程的右端等于0，从而在Ω内几乎处处$u=0$.

假设$u_n\in C_0^\infty(\Omega)$，并且当$n\to\infty$时在$\mathscr{L}_2(\Omega)$范数下$u_n\to u$．因为对于函数$v^1$，(1.6.5)成立,且由极大值原理$v^1$关于$\varepsilon$和$\delta$一致有界,我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \varepsilon\Delta v^1\varphi^\delta u dx\right| &= \left|\int_\Omega \varepsilon\Delta v^1\varphi^\delta((u-u_n)+u_n)dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_\Omega \varepsilon\Delta v^1\varphi^\delta(u-u_n)dx\right| \\
&\quad + \left|\int_\Omega \varepsilon\Delta(\varphi^\delta u_n)v^1 dx\right| \\
&\leqslant \left(\int_\Omega \varepsilon^2(\Delta v^1)^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega (u-u_n)^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \left|\int_\Omega \varepsilon v^1\Delta(\varphi^\delta u_n)dx\right| \qquad (1.6.18)
\end{aligned}
$$

容易看出,对于固定的δ，当$n\to\infty$且$\varepsilon_n\to 0$时，最后这个不等式的右端趋于0．我们注意,因为在γ^δ外$\varphi^\delta\equiv 1$，(1.6.17)中最后的两个积分实际上积分域只取在Γ的邻域γ^δ与区域Ω的交集上．设$\gamma^\delta=\gamma_1^\delta\cup\gamma_2^\delta\cup\gamma_3^\delta$，其中$\gamma_k^\delta$是$\gamma^\delta$与$\Gamma_k$的某邻域的交集($k=1, 2, 3$).

为了估计积分域取为$\gamma_1^\delta\cap\Omega$的这些积分，我们分解集合$\Gamma_1$的邻域$\gamma_1^\delta$为分块$Q_{1,\delta}^l(l=1,\cdots,N_1)$，使得在$Q_{1,\delta}^l$内可以引进局部坐标$y_1^l,\cdots,y_m^l$，使得

$$
y_m^l=F(x_1,\cdots,x_m),\quad y_{m-1}^l=\Psi(x_1,\cdots,x_m)
$$

并且在$Q_{1,\delta}^l\cap Q_{1,\delta}^k$内,有$y_m^l=y_m^k$，$y_{m-1}^l=y_{m-1}^k$.

对于新坐标$y_1,\cdots,y_m$，算子$\varepsilon\Delta v^1+a\Delta v^1+L^*(v^1)$取形式

$$
(\varepsilon+a)(\alpha^{kl}v^1_{y_ky_l}+\nu^k v^1_{y_k})+\alpha^{kl}v^1_{y_ky_l}+\beta^{*l}v^1_{y_l}+c^*v^1
$$

我们用R_1^l表示$\Omega\cap Q_{1,\delta}^l$．在$\Gamma_1$的邻域内我们取函数$\varphi^\delta$为

$$\varphi^{\delta}=\varphi\left(\frac{\delta y_{m-1}^{2}+y_{m}^{2}}{\delta^{2}}\right)$$

其中，当 $s\leqslant 1$ 时 $\varphi(s)=0$，当 $s\geqslant 2$ 时 $\varphi(s)=1$，当 $1<s<2$ 时 $0<\varphi<1$，而且 $\varphi(s)$ 是 s 的光滑函数．我们有

$$\int_{\Omega\cap\gamma_1^{\delta}}[L^{*}(\varphi^{\delta})-c^{*}\varphi^{\delta}]v^{1}udx$$

$$=\int_{\cup R_1^{t}}(\alpha^{kl}\varphi^{\delta}_{y_ky_l}+\beta^{*l}\varphi^{\delta}_{y_l})uv^{1}\kappa dy \quad (1.6.19)$$

其中，κ 是正的光滑函数．我们注意到区域 γ_1^{δ}（在 γ_1^{δ} 上 $\varphi^{\delta}_{y_l}$ 和 $\varphi^{\delta}_{y_ky_l}$ 可能不为 0）的测度是 $\delta^{3/2}$ 阶，并且在此区域内

$$\varphi^{\delta}_{y_m}=O(\delta^{-1}),\ \varphi^{\delta}_{y_{m-1}}=O(\delta^{-1/2}),\ \varphi^{\delta}_{y_my_m}=O(\delta^{-2}),$$

$$\varphi^{\delta}_{y_{m-1}y_{m-1}}=O(\delta^{-1}),\ \varphi^{\delta}_{y_{m-1}y_m}=O(\delta^{-3/2}) \quad (1.6.20)$$

因为在 Γ_1 上，$\alpha^{kl}n_kn_l=0$，$\alpha^{kl}n_k=0$，$\alpha^{mm}_{y_l}=0$，所以在区域 γ_1^{δ} 内，我们有

$$\alpha^{mm}=O(\delta),\ \alpha^{m-1,m-1}=O(1),\ \alpha^{m,m-1}=O(\delta^{1/2}) \quad (1.6.21)$$

利用关系式(1.6.20)和(1.6.21)，我们来估计积分(1.6.19)．利用 Hölder 不等式，得到

$$\left|\int_{R_1^t}(\alpha^{kl}\varphi^{\delta}_{y_ky_l}+\beta^{*l}\varphi^{\delta}_{y_l})v^{1}u\kappa dy\right|$$

$$\leqslant\int_{R_1^t}C_2\delta^{-1}|u|dy$$

$$\leqslant C_2\delta^{-1}\left(\int_{R_1^t}dy\right)^{2/3}\left(\int_{R_1^t}|u|^{3}dy\right)^{1/3}$$

$$\leqslant C_3\left(\int_{R_1^t}|u|^{3}dy\right)^{1/3}$$

因为假设 $u\in\mathscr{L}_3(Q_1)$，其中 Q_1 是 Γ_1 的某邻域，而且 $\mathrm{mes}\gamma_1^{\delta}=O(\delta^{3/2})$，所以当 $\delta\to 0$ 时，最后的积分趋于 0．

现在我们估计(1.6.17)的最后一个积分，其积分域取 $\Omega\cap\gamma_1^{\delta}$：

$$\left|\int_{\Omega\cap\gamma_1^{\delta}}a^{kl}v^{1}_{x_l}\varphi^{\delta}_{x_k}udx\right|\leqslant\left(\int_{\Omega\cap\gamma_1^{\delta}}a^{kl}v^{1}_{x_k}v^{1}_{x_l}dx\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left(\int_{\Omega\cap\gamma_1^{\delta}}a^{kl}\varphi^{\delta}_{x_k}\varphi^{\delta}_{x_l}u^{2}dx\right)^{1/2} \quad (1.6.22)$$

为了估计(1.6.22)右端的第一个积分，用 $v^{1}(1-\varphi^{2\delta})\eta$ 乘方程

(1.6.15)并且在 $\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}$ 上积分。这里选取函数 $\eta(y_1, \cdots, y_{m-2})$ $\in C^{(2)}(Q^t_{1,2\delta})$，使得在 $Q^t_{1,2\delta}$ 内 $\eta > 0$，而在 $Q^t_{1,2\delta}$ 的边界上 $(1-\varphi^{2\delta})\eta$ 及其一阶导数等于 0。分部积分并注意在 Σ^δ 上 $v^1 = 0$，而在 Ω_δ 内 $a = O(\delta)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} [-(\varepsilon + a) v^1_{x_k} v^1_{x_k} (1 - \varphi^{2\delta})\eta \\
&\quad - a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} (1 - \varphi^{2\delta})\eta] dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} [(\varepsilon + a)(1 - \varphi^{2\delta})\eta]_{x_k x_k} (v^1)^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} \frac{1}{2} [a^{kl}(1 - \varphi^{2\delta})\eta]_{x_k x_l} (v^1)^2 dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} \Big[c^*(1 - \varphi^{2\delta})\eta \\
&\quad - \frac{1}{2} (b^{*l}(1 - \varphi^{2\delta})\eta)_{x_l} \Big] (v^1)^2 dx \\
&= \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} \Phi (1 - \varphi^{2\delta}) \eta v^1 dx
\end{aligned}
\tag{1.6.23}
$$

利用关系式(1.6.20)并注意 $\gamma_t^{2\delta}$ 的测度是 $\delta^{3/2}$ 阶，由此得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} (1 - \varphi^{2\delta})\eta dx &\leqslant C_4(\delta^{1/2} + \varepsilon\delta^{-1/2}) \\
&\quad + \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} |a^{kl} \varphi^{2\delta}_{x_k x_l}| \eta (v^1)^2 dx
\end{aligned}
\tag{1.6.24}
$$

为了估计最后的积分，我们在区域 $Q^t_{1,2\delta}$ 内引进局部坐标 $y_1, \cdots, y_m$。利用(1.6.20)和(1.6.21)，得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} |a^{kl} \varphi^{2\delta}_{x_k x_l}| \eta (v^1)^2 dx \\
&\quad \leqslant \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} |\alpha^{kl} \varphi^{2\delta}_{y_k y_l}| \eta (v^1)^2 \kappa dy \\
&\qquad + \int_{\Omega_\delta \cap Q^t_{1,2\delta}} a^{kl} \varphi^{2\delta}_{y_l} (y_l)_{x_k x_l} | \eta (v^1)^2 \kappa dy \\
&\quad \leqslant C_5 \delta^{3/2}
\end{aligned}
$$

其中，常数 C_4 和 C_5 不依赖于 ε 和 δ。显然

$$\int_{\Omega\cap\gamma_1^\delta} a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} dx \leqslant C \int_{\bigcup_i (\Omega_\delta \cap Q^i_{1,2\delta})} a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} (1-\varphi^{2\delta}) \eta dx$$

我们进一步得到

$$\int_{\Omega\cap\gamma_1^\delta} a^{kl} \varphi^\delta_{x_k} \varphi^\delta_{x_l} u^2 dx = \int_{\bigcup R_1^i} \alpha^{kl} \varphi^\delta_{y_k} \varphi^\delta_{y_l} u^2 \kappa dy$$

$$\leqslant C_6 \delta^{-2} \left(\int_{\bigcup R_1^i} dy \right)^{1/3} \left(\int_{\bigcup R_1^i} |u|^3 dy \right)^{2/3}$$

$$\leqslant C_7 \delta^{-1/3} \left(\int_{\bigcup R_1^i} |u|^3 dy \right)^{2/3}$$

因此对于 $\varepsilon<\delta$，从(1.6.22)得到

$$\left| \int_{\Omega\cap\gamma_1^\delta} a^{kl} v^1_{x_k} \varphi^\delta_{x_l} u \, dx \right| \leqslant C_8 \left(\int_{\Omega\cap\gamma_1^\delta} |u|^3 dx \right)^{1/3}$$

由 u 的假定，当 $\varepsilon<\delta$ 而 $\delta\to 0$ 时，后面这个不等式的右端趋于 0。

现在我们估计(1.6.17)的最后两个积分，积分域取 $\Omega\cap\gamma_2^\delta$，其中 γ_2^δ 是 Γ_2 的这样邻域：在其外 $\varphi^\delta=1$。在 Γ_2 的邻域内，我们取函数 φ^δ 为

$$\varphi^\delta = \varphi\left(\frac{y_{m-1}^2 + y_m^2}{\delta^2} \right)$$

其中 $\varphi(s)$ 是上面定义过的函数。这些积分域取为 $\Omega\cap\gamma_2^\delta$ 的积分，完全跟积分域取 $\Omega\cap\gamma_1^\delta$ 的积分一样进行估计。为此，我们将集合 Γ_2 的邻域 γ_2^δ 分划为区域 $Q^i_{2,\delta}$，$i=1,\cdots,N_2$，并且在 $Q^i_{2,\delta}$ 内引用新坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得

$$y_m = F(x_1,\cdots,x_m),\quad y_{m-1} = \Psi(x_1,\cdots,x_m)$$

容易看出，在这过程中 $\alpha^{m-1,m-1} = a^{kl}\Psi_{x_k}\Psi_{x_l}$。因此，在 Γ_2 的 δ 邻域内

$$\varphi^\delta_{y_j} = O(\delta^{-1}),\quad \varphi^\delta_{y_k y_l} = O(\delta^{-2}), \tag{1.6.25}$$
$$\alpha^{m,m} = O(\delta^2),\quad \alpha^{m-1,m-1} = O(\delta),\quad \alpha^{m-1,m} = O(\delta)$$

显然，区域 γ_2^δ 的测度为 δ^2 阶。考虑到(1.6.25)并且令 $\Omega\cap Q^i_{2,\delta} = R_2^i$，我们得到

$$\left| \int_{\Omega\cap\gamma_2^\delta} [L^*(\varphi^\delta) - c^*\varphi^\delta] v^1 u dx \right|$$

$$= \left| \int_{\cup R_2^i} (\alpha^{kl}\varphi^\delta_{y_k y_l} + \beta^{*k}\varphi^\delta_{y_k}) v^1 u \kappa dy \right|$$

$$\leqslant C_9 \delta^{-1} \int_{\cup R_2^i} |u| dy$$

$$\leqslant C_{10} \left(\int_{\cup R_2^i} |u|^2 dy \right)^{1/2}$$

因为 $u \in \mathscr{L}_2(\Omega)$，最后这个积分当 $\delta \to 0$ 时趋于0。

(1.6.22) 类型的不等式显然对区域 $\Omega \cap \gamma_2^\delta$ 也成立。在 Γ_2 的邻域内，注意到(1.6.25)，我们得到

$$\left| \int_{R_2^i} \alpha^{kl} \varphi^\delta_{y_k} \varphi^\delta_{y_l} u^2 \kappa dy \right| \leqslant C_{11} \delta^{-1} \int_{R_2^i} |u|^2 dy$$

由积分域取 $\Omega_\delta \cap Q^i_{2,2\delta}$ 的(1.6.23)，我们推得

$$\int_{\Omega \cap \gamma_2^\delta} a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} dx$$

$$\leqslant \int_{\bigcup_i (\Omega_\delta \cap Q^i_{2,2\delta})} a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} (1 - \varphi^{2\delta}) \eta dx$$

$$\leqslant C_{12} \varepsilon + C_{13} \delta$$

因此对于 $\varepsilon < \delta$，得到

$$\left| \int_{\Omega \cap \gamma_2^\delta} a^{kl} v^1_{x_k} \varphi^\delta_{x_l} u dx \right| \leqslant C_{14} \left(\int_{\Omega \cap \gamma_2^\delta} |u|^2 dx \right)^{1/2}$$

这表示当 $\varepsilon < \delta$, $\delta \to 0$ 时，(1.6.17)中积分域取 $\Omega \cap \gamma_2^\delta$ 的最后一个积分趋于0。

现在我们考虑 Γ_3 的邻域 γ_3^δ，并且证明：当 $\varepsilon < \delta$ 且 $\delta \to 0$ 时，(1.6.17) 中积分域取 $\Omega \cap \gamma_3^\delta$ 的最后两个积分趋于0。根据假设，集合 Γ_3 在 Σ 上的 δ 邻域的面积不超过 $C_{15}\delta^2$。我们将邻域 γ_3^δ 分划为充分小区域 $Q^i_{3,\delta}$，$i = 1, \cdots, N_3$。在 $Q^i_{3,\delta}$ 内引进局部坐标 $y_1, \cdots, y_m$，使得 Σ 位于平面 $y_m = 0$ 内，并且在 Ω 内 $y_m > 0$。假设在 $\Sigma \cap Q^i_{3,\delta}$ 上定义的光滑函数 $\varphi_1^\delta(y_1, \cdots, y_{m-1})$，使得：在 Γ_3 的 δ 邻域内 $\varphi_1^\delta = 0$，在此邻域的闭包外 $\varphi_1^\delta > 0$，而在 Γ_3 的 2δ 邻域外 $\varphi_1^\delta = 1$，且在 Σ 上处处有 $0 \leqslant \varphi_1^\delta \leqslant 1$。设光滑函数 $\varphi_2^\delta(y_m)$ 当 $y_m \leqslant \delta$ 时 $\varphi_2^\delta(y_m) = 0$，当 $y_m \geqslant 2\delta$ 时 $\varphi_2^\delta(y_m) = 1$，而当 $\delta < y_m < 2\delta$ 时 $0 < \varphi_2^\delta < 1$。在 Γ_3 的邻域内用等式

$$\varphi^{\delta} = \varphi_1^{\sqrt{\delta}} \cdot \varphi_2^{\delta}$$

定义函数 φ^{δ}. 容易看出在 γ_3^{δ} 中, $\varphi^{\delta}_{y_j}$ 和 $\varphi^{\delta}_{y_k y_j}$ 可能不为 0 的子集的测度不超过 $C_{16}\delta^2$. 我们还可以假设

$$\varphi^{\delta}_{1y_j} = O(\delta^{-1}),\ \varphi^{\delta}_{1y_k y_j} = O(\delta^{-2}),\ \varphi^{\delta}_{2y_m} = O(\delta^{-1}),$$
$$\varphi^{\delta}_{2y_m y_m} = O(\delta^{-2})$$

因而有关系式

$$\begin{aligned} &\varphi^{\delta}_{y_m} = O(\delta^{-1});\ \varphi^{\delta}_{y_j} = O(\delta^{-1/2}),\ j \neq m \\ &\varphi^{\delta}_{y_m y_m} = O(\delta^{-2});\ \varphi^{\delta}_{y_m y_j} = O(\delta^{-3/2}),\ j \neq m \qquad (1.6.26) \\ &\varphi^{\delta}_{y_k y_j} = O(\delta^{-1}),\ k \neq m,\ j \neq m \end{aligned}$$

在区域 γ_3^{δ} 内,有

$$\alpha^{mm} = O(\delta),\ \alpha^{mj} = O(\delta^{1/2}),\ \alpha^{kj} = O(1),$$
$$k \neq m,\ j \neq m \qquad (1.6.27)$$

跟前面的情况完全一样,我们可得: (1.6.17)右端积分区域取 $\Omega \cap \gamma_3^{\delta}$ 的第二个积分不超过

$$C_{17}\left(\int_{\Omega \cap \gamma_3^{\delta}} |u|^2 dx\right)^{1/2}$$

而(1.6.17)中的积分域取 $\Omega \cap \gamma_3^{\delta}$ 的最后一个积分完全跟对 γ_2^{δ} 那样,可利用(1.6.23),(1.6.26),(1.6.27)来估计.

定理因此证毕.

我们注意, 如果 Σ_1 的所有点都是 Σ^0 的内点的极限, 并且, 或者算子 L^* 的系数可以延拓到 Σ_1 的邻域, 使得 $a^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant 0$, $a^{kj} \in C^{(1)}$, 或者在 Σ_1 上, $\partial a^{kj}F_{x_k}F_{x_j}/\partial \bar{n}$ 充分小,那么,定理 1.6.1 的条件

$$\beta^* < 0,\ 在\ \Sigma_1\ 上$$

总是满足的.

一些例子表明, 定理 1.6.1 的假设是本质的. 特别是, 如果集合 Γ 在 Σ 上的 δ 邻域有 δ 阶的面积, 则在这种情况下, 对于任意 $p < 3$, (1.1.4), (1.1.5)在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 类的弱解可能不唯一,即定理 1.6.1 的条件 1)不可能减弱.

我们在 (x, t) 平面上由光滑闭曲线 Σ 所围成的区域 Ω 内考虑

热传导方程

$$L(u) \equiv u_{xx} - u_t = 0 \tag{1.6.28}$$

其中，Σ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内与曲线 $t = |x|^{2+\varepsilon}$ 重合，$\varepsilon = \text{const} > 0$。 我们假设曲线 Σ 除了在点 $(0, 0)$ 和 $(0, 1)$ 外没有水平切线．在这种情况，点$(0,0)$属于 Σ_2，点$(0, 1)$属于Σ_1，而Σ的其余点属于 Σ_3．在 (1.6.28) 中，作代换 $u = e^{\alpha t}v$，$\alpha = \text{const} > 0$，在 $\Omega \cup \Sigma$ 内我们得到一个方程，其中 $c^* < 0$．我们可以假设在$(0, 1)$的邻域内边界Σ是这样的：在点$(0, 1)$上 $\beta^* < 0$．在Ω内函数

$$w = t^{1/2}e^{-x^2/4t}$$

满足 (1.6.28)．在区域 Ω 的边界 Σ 上，它确定一个连续函数，在点 $(0, 0)$ 的邻域内它由

$$w|_\Sigma = |x|^{-(1+\varepsilon/2)}e^{-\frac{1}{4}x^{-\varepsilon}}$$

给出．容易证明，存在一个函数 $W(x, t)$，它在 $\Omega \cup \Sigma$ 内连续，在 Σ 的点上与 w 重合，并且在 Ω 内满足 (1.6.28)．例如在 [61] 和 [100] 中已经证明了这种函数 $W(x, t)$ 的存在．因为假设边界 Σ 是光滑的，众所周知，在 $\Omega \cup \Sigma$ 内（可能除了点$(0, 0)$及$(0, 1)$外）函数 $W(x, t)$ 处处有连续导数 W_x, W_{xx}, W_t.[37]

我们证明，在区域 Ω 内函数 $u = W(x, t) - w(x, t)$ 是当 $f \equiv 0$ 和 $g \equiv 0$ 时 (1.1.4)，(1.1.5) 的弱解，并且属于 $p < 3$ 的空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$．因为 $W(x, t)$ 在 $\Omega \cup \Sigma$ 内连续而且在 $x = 0$ 和 $t \to 0$ 时 $w(x, t) \to \infty$，所以在 Ω 内具有正测度的集合上显然有 $u \neq 0$。因此对所考虑的情况，问题(1.1.4)，(1.1.5)至少有两个解：函数 u 和恒等于 0 的解。

我们证明在 $p < 3$ 时 $u(x, t) \in \mathscr{L}_p(\Omega)$．因为 $W(x, t)$ 在 Ω 内有界，因此只需要证明对于 $p < 3$，$w(x, t) \in \mathscr{L}_p(\Omega)$。如果 $-p/2 + 1/(2 + \varepsilon) > -1$，我们有

$$\int_\Omega w^p dx\,dt = \int_\Omega t^{-p/2}e^{-px^2/4t}dx\,dt$$

$$\leqslant \int_0^{t_0}\left(t^{-p/2}\int_{-t^{1/(2+\varepsilon)}}^{t^{1/(2+\varepsilon)}} dx\right)dt + C_1$$

$$= 2\int_0^{t_0} t^{-\frac{p}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon}}\,dt + C_1$$

$$< C_2;\ t_0,\ C_1,\ C_2 = \text{const}$$

当 $p < 3$ 时，如果取常数 $\varepsilon > 0$ 充分小，那么不等式 $-\frac{p}{2}+\frac{1}{2+\varepsilon} > -1$ 成立。现在我们证明 $u(x,t)$ 满足积分恒等式(1.6.14)。假设 $v \in C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$，并且在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上 $v=0$。由连续性，在 Σ 的所有点上 $v=0$。因为 $u(x,t)$ 是区域 $\Omega\cap\{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta\}$ $(\delta=\text{const}>0)$ 内的光滑函数，根据 Green 公式(1.1.14)，恒等式

$$\int_{\Omega\cap\{\delta\leqslant t\leqslant 1-\delta\}} L^*(v)u\,dx\,dt$$

$$= \int_{\Omega\cap\{t=1-\delta\}} uv\,dx - \int_{\Omega\cap\{t=\delta\}} uv\,dx \qquad (1.6.29)$$

成立。容易看出，对于充分小的 δ，有

$$|u(x,t)| \leqslant C_3 t^{-1/2},\ \text{mes}(\Omega\cap\{t=\delta\}) = 2\delta^{1/(2+\varepsilon)}$$

因为 v 是在 Σ 上等于 0 的光滑函数，从而得出在 Ω 内

$$|v| \leqslant C_4 t^{1/(2+\varepsilon)}.$$

因此，如果 ε 充分小，那么(1.6.29)右端的积分在 $\delta\to 0$ 时趋于 0。假如 Γ 在 Σ 上的 δ 邻域的面积是 δ 阶，从而函数 $u(x,t)$ 满足(1.6.14)，而问题(1.1.4)，(1.1.5)在 $\mathscr{L}_p(\Omega)(p<3)$ 类中可能有不唯一的解。

用类似的论证可以证明：如果定理 1.6.1 中的集合 Γ_3 非空，则问题(1.1.4)，(1.1.5)在 $p<2$ 的 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 类中可能有不唯一的解。为此，我们在 $R^m(x_1,\cdots,x_{m-1},t)$ 空间的光滑区域 Ω 内考虑热传导方程

$$L(u) = \Delta u - u_t = 0 \qquad (1.6.30)$$

Ω 在原点的邻域内以曲面 $t = r^{2+\varepsilon}$ 为边界，其中

$$r^2 = \sum_{j=1}^{m-1} x_j^2,\ \varepsilon = \text{const} > 0.$$

我们将假设区域 Ω 的边界 Σ 仅在两点 P_1 和 P_2 有平行于 t 轴的

法向量，其中 P_1 是坐标原点．在曲面 Σ 上函数

$$w(x,t)=t^{-\frac{m-1}{2}}e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

是连续的．因此存在函数 $W(x,t)$，它在 $\Omega\cup\Sigma$ 内连续，满足(1.6.30)并且处处光滑(可能除 P_1 和 P_2 两点外，参看[37, 61])．不难验证，函数 $u(x,t)=W(x,t)-w(x,t)$ 对于 $p<1+2/(m-1)$ 属于 $\mathscr{L}_p(\Omega)$，并且当 ε 充分小时满足(1.6.14)．

因此，在空间 R^3 中，如果 Γ_3 非空，对于 $p<2$，(1.1.4)，(1.1.5)在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 类中的解可能不唯一．在这种意义下，定理 1.6.1 的条件 $u\in\mathscr{L}_2(\Omega)$ 是精确的．

在定理 1.6.1 中，条件 $c^*<0$ 同样是本质的．函数 r^α 在(1.5.3)意义下，在任意的球 $\Omega=\{r<\beta\}$ 内满足方程

$$r^2\Delta u-\alpha^2u=0 \tag{1.6.31}$$

其中 $r^2=\sum_{i=1}^{2}x_i^2$，$-1<\alpha<0$，$\beta>0$．因为 $c=-\alpha^2<0$，依据定理 1.5.1，在 Ω 内(1.6.31)存在满足条件 $u|_{r=\beta}=\beta^\alpha$ 的有界弱解 $u(x)$．对于 $|\alpha p|<2$，$p\geqslant1$，函数 $u-r^\alpha$ 属于 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 类，并且满足恒等式(1.6.14)．显然区域 Ω 的边界属于 Σ_3．容易看出，在 Ω 的正测度集合上 $u-r^\alpha\neq0$，并且

$$c^*=-\alpha^2+4>0.$$

除了某些简化外，完全象证明定理 1.6.1 那样，可以证明下面的定理．在恒等式(1.5.3)意义下，这个定理研究(1.1.4)，(1.1.5)在有界可测函数类中弱解的唯一性．

定理 1.6.2 假设在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c^*<0$，在 Σ_1 的点上 $\beta^*<0$，并且 $\Omega\in A^{(2,\alpha)}$．假设 $L^*(v)$ 的系数可以延拓到集合 $\Sigma_0\cup\Sigma_2$ 的 δ 邻域 G_δ 内，使得

$$a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant0,\ 在\ \overline{\Omega\cup G_\delta}\ 上,\ a^{kj}\in C_{(2)}(\Omega\cup G_\delta),$$

$$b^{*k}\in C_{(1)}(\Omega\cup G_\delta),\ c^*\in C^{(0,\alpha)}(\overline{\Omega\cup G_\delta}),\ 0<\alpha<1$$

那么，如果对于在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 中的任意函数

v

$$\int_{\Omega} L^*(v)u dx = 0$$

且集合 Γ 在 Σ 上的 δ 邻域的面积为 δ^q 阶，$q>0$，则有界可测函数 $u(x)$ 在 Ω 内几乎处处等于 0。

在证明定理 1.6.2 时，完全象证定理 1.6.1 时在 Γ_3 的邻域内构造函数 φ^δ 那样，在集合 Γ 的邻域内构造函数 φ^δ。

从定理 1.6.2 和定理 1.5.1 得出关于极大值原理的如下定理。

定理 1.6.3 假设满足定理 1.6.2 和 1.5.1 的假定。那么，(1.1.4)，(1.1.5)在(1.5.3)意义下的任意有界弱解 $u(x)$ 满足极大值原理：

$$|u| \leqslant \max\left\{\sup_{\Omega}\frac{|f|}{c_0},\ \sup_{\Sigma_3\cup\Sigma_2}|g|\right\} \tag{1.6.32}$$

在[102]中所举的问题(1.1.4)，(1.1.5)的一个例子表明，定理 1.6.2 中关于集合 Γ 的假设是本质的，因为，如果集合 Γ 在 Σ 上的 δ 邻域的面积当 $\delta\to 0$ 时不趋于 0，那么在有界可测函数类中，(1.1.4)，(1.1.5)的解可能不唯一。

我们考察 (x, t) 平面上的光滑区域 Ω，它由直线 $t=1$ 上的线段 $0\leqslant x\leqslant 1$，曲线 $t=f(x)$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 以及分别联结点 $(0, 0)$，$(0, 1)$ 和 $(1, 0)$，$(1, 1)$的两条光滑曲线 K_1 和 K_2 所围成，并且区域 Ω 的边界与平行于 t 轴的直线相交不多于两点。作函数 $f(x)$ 使得 $f\in C^{(2,\alpha)}$，在线段 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上，具有正测度的 Cantor 集合 E 上的 $f(x)=0$，并且在不属于 E 的这条线段的点上，$0<f(x)<1$。设

$$L(u)\equiv t^2u_{tt}-u_t-2u=0 \tag{1.6.33}$$

这个常微分方程有如下形式的通解：

$$u=C_1(1-2t+2t^2)+C_2t^2e^{-\frac{1}{t}} \tag{1.6.34}$$

其中，C_1 和 C_2 是任意常数。在(1.6.33)中作代换 $u=u^1e^{\alpha t}$，并且选取常数 $\alpha>0$，使得对于 $t\geqslant 0$ 时，有 $-\alpha+t^2\alpha^2-4\alpha t<0$，$t^2\alpha^2-\alpha-2<0$，我们得到方程

$$L_1(u^1) \equiv t^2u_{tt}^1 - u_t^1 + 2\alpha t^2 u_t^1 + (t^2\alpha^2 - \alpha - 2)u^1 = 0 \quad (1.6.35)$$

因此，方程 $c^* = (t^2\alpha^2 - \alpha \quad 2) - 4\alpha t + 2 < 0$ 并且 $c < 0$.

容易看出，对于方程(1.6.33)，(1.6.35)和上面所作的区域 Ω，直线 $t = 1$ 上的线段 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 属于 Σ_3，直线 $t = 0$ 上的集合 E 属于 Σ_2，曲线 $t = f(x)$ 上 $f(x) \neq 0$ 的点属于 Σ_3，而曲线 K_1 和 K_2 的点属于 Σ_3 和 Σ_0。因此，除了关于 Γ 的条件外，对于方程(1.6.35)满足定理 1.6.2 的所有假设．对于这个方程，集合 Γ 包含集合 E，并在线段 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上具有正测度．

在(1.6.14)中的函数 v 在 Σ_3 上必须为 0，但因为 v 在 $\Omega \cup \Sigma$ 内光滑，所以它在 E 上也为 0．令 $w(t)$ 为(1.6.35)的解且 $w(1) = 0$，而 $w(t) \neq 0$．由(1.6.34)容易看出，这种解 $w(t)$ 存在．不难验证，在 $x \in E$ 时，令 $u_1(x, t) = w(t)$，而在 $\Omega \cup \Sigma$ 的其余点上等于 0 所定义的函数 $u_1(x, t)$ 是齐次问题 $L_1(u) = 0$ (在 Ω 内)，$u = 0$ (在 $\Sigma_3 \cup \Sigma_2$ 上)的弱解，其中 $L_1(u)$ 是算子(1.6.35)．显然，$u_1(x, t)$ 是有界可测函数，并且在 Ω 的正测度子集上不为 0．

注 1 在定理 1.6.1 中，在区域 Ω 的边界 Σ 的点集 Σ_1 上，$\beta^* < 0$ 的条件可换为如下条件：1) 在 Σ_1 的内点上 $\beta^* \leqslant 0$． 2)算子 $L^*(v)$ 的系数可以延拓到 Σ_1 在 Σ 上的边界点集合 Γ^1 的某邻域，使其满足定理 1.6.1 中对邻域 G_δ 所要求的条件． 3)集合 Γ_1 可以分划为一些子集，每个子集满足定理 1.6.1 中所述的 Γ_1，Γ_2 和 Γ_3 的相应条件 1)，2)或 3)之一．

在这种假设下，对于定理 1.6.1 的证明，可以用先前利用 Σ_1 上 $\beta^* < 0$ 的条件证定理的方法来进行，只需将集合 Γ^1 的 δ 邻域包含在区域 Ω_δ 内．

完全同样地，可以用上述条件 1) 和 2)及补充假设 Γ^1 在 Σ 的 δ 邻域的面积为 δ^q 阶(对某 $q > 0$) 来代替定理 1.6.2 中在 Σ_1 上 $\beta^* < 0$ 的条件．

注 2 在定理 1.6.1 和 1.6.2 中，在 Σ_1 上 $\beta^* < 0$ 的条件可以用 Σ_1 上及在集合 $\bar{\Sigma}_3 \cap \Sigma_1$ 的某邻域内 $\beta^* \leqslant 0$ 的条件代替．

定理 1.6.4 假设在 $\Omega \cup \Sigma$ 内 $c^* < 0$，并且假设在 $\Sigma_1 \cup \Sigma$

的点上及在 $\Sigma_3\cap(\Sigma_1\cup\Sigma_0)$ 的某邻域中的 Σ_3 上 $\beta^*\leqslant 0$. 假设 $\Omega\in A^{(2,\alpha)}$ 且算子 $L^*(v)$ 的系数可以延拓到集合 Σ_2 的 δ 邻域 G^δ, 使得 $a^{kj}\in C_{(2)}(\Omega\cup G^\delta)$, $b^{*k}\in C_{(1)}(\Omega\cup G^\delta)$, $c^*\in C^{(0,\alpha)}(\overline{\Omega\cup G^\delta})$, $0<\alpha<1$, 并且在 $\overline{\Omega\cup G^\delta}$ 上, $a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$. 如果函数 $u(x)\in\mathscr{L}_p(\Omega)$, $p\geqslant 2$, 对于 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\Omega)$ 的任意函数 v, 有

$$\int_\Omega L^*(v)u\,dx=0$$

而且 Σ_2 在 Σ 上的边界点集合 Γ^2 可分划为不相交的闭子集 Γ_1, Γ_2, Γ_3, 对于这些子集,定理 1.6.1 的条件 1), 2) 和 3) 成立,这样以致于 $u(x)$ 在 Ω 内几乎处处为 0.

同样用类似证明定理 1.6.1 的方法来证明定理 1.6.4. 在这种情况,区域 Ω_δ 仅包含集合 Σ_2 的 δ 邻域. 我们还应当考虑这样的事实: 在引理 1.5.1 中, 在 Σ_3 的边界且属于 $\overline{G}$ 的点上, $\beta<0$ 的条件可以用在 Σ_3 上且属于 Σ_3 的边界点某邻域的点上 $\beta\leqslant 0$ 的条件来代替(见引理 1.5.1 的注).

用完全同样的方法,我们得到如下定理:

定理 1.6.5 设(1.5.1)的系数和 Ω 的边界满足定理 1.6.4 的假设,但对 Γ^2 的条件, 可用集合 Γ^2 在 Σ 上的 δ 邻域有 $\delta^q(q>0)$ 阶面积的条件来代替. 那么,在 Ω 内(1.5.1),(1.5.2)在(1.5.3)意义下的弱解在有界可测函数类中是唯一的.

下面(1.5.1),(1.5.2)的唯一性定理并不象定理 1.6.1—1.6.5 那样,假设(1.5.1)的系数可以通过边界的任何部分光滑延拓.

定理 1.6.6 假设在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c^*<0$, 并且假设在 $\Sigma_1\cup\Sigma_0$ 的点上以及在 $\Sigma_3\cap(\Sigma_1\cup\Sigma_0)$ 的某邻域内的 Σ_3 的点上 $\beta^*\leqslant 0$. 假设 $\Omega\in A^{(2,\alpha)}$, 并且存在集合 Σ_2 在 Σ 上的一个邻域 σ_2, 使得

$$\frac{1}{\delta}\int_{\sigma_2^\delta}u^2(x)dx\to 0,\ 当\ \delta\to 0 \tag{1.6.36}$$

其中, σ_2^δ 是在 Ω 中与 σ_2 的距离不超过 δ 的点集. 那么, 如果

$u(x)\in\mathscr{L}_2(\Omega)$ 且对于在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\bar{\Omega})$ 的任意函数 v，有

$$\int_\Omega L^*(v)u\,dx=0 \tag{1.6.37}$$

则函数 $u(x)$ 在 Ω 内几乎处处等于 0。

证明　在 Ω 内考虑方程

$$\varepsilon\Delta v+\sqrt{\varepsilon}\,a(x,\varepsilon)\Delta v+L^*(v)=\Phi \tag{1.6.38}$$

及条件

$$v=0,\ \text{在}\,\Sigma\,\text{上} \tag{1.6.39}$$

其中 $\Phi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varepsilon=\text{const}>0$，$a(x,\varepsilon)$ 是光滑函数，它在 σ_2 的 $\sqrt{\varepsilon}$ 邻域内等于 1，而在 σ_2 的 $2\sqrt{\varepsilon}$ 邻域外等于 0，并且对于 $0<\varepsilon\leqslant 1$，使得 $0\leqslant a(x,\varepsilon)\leqslant 1$。根据引理 1.5.1 和附注，对于 (1.6.38)，(1.6.39)的解 $v(x)$，估计

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|\leqslant C_1\varepsilon^{1/2}\ (\text{在}\,\Sigma\,\text{上}),\ j=1,\cdots,m$$

成立，其中 C_1 不依赖于 ε。

用 v 乘方程(1.6.38)，在 Ω 上积分并且用分部积分变换这个方程的个别项，我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi v\,dx=\int_\Omega\Big[&-\varepsilon v_{x_j}v_{x_j}-\sqrt{\varepsilon}\,a v_{x_j}v_{x_j}\\&-a^{kj}v_{x_k}v_{x_j}+\Big(-\frac{1}{2}b^{*j}_{x_j}+c^*\\&+\frac{1}{2}a^{kj}_{x_kx_j}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\,a_{x_jx_j}\Big)v^2\Big]dx\end{aligned} \tag{1.6.40}$$

由于 $c^*<0$，根据极大值原理，函数 v 在 Ω 内关于 ε 一致有界。我们可以假设

$$|a_{x_j}|\leqslant C_2\varepsilon^{-1/2},\ |a_{x_jx_j}|\leqslant C_3\varepsilon^{-1};\ C_2,\ C_3=\text{const}$$

显然，$a_{x_jx_j}\neq 0$ 的点集的测度为 $\sqrt{\varepsilon}$ 阶。因此

$$\sqrt{\varepsilon}\int_\Omega a_{x_jx_j}v^2dx<C_4$$

从(1.6.40)得到

$$\varepsilon\int_{\Omega}v_{x_i}v_{x_i}dx<C_5$$

我们用 C_i 表示与 ε 无关的常数．此外，完全象引理 1.6.1 的证明那样，我们求得

$$\varepsilon^2\int_{\Omega}(\Delta v)^2dx+\varepsilon^{3/2}\int_{\Omega}a(\Delta v)^2dx\leqslant C_6 \qquad (1.6.41)$$

为了证明定理 1.6.6，我们将 (1.6.38)，(1.6.39) 的解 $v(x)$ 代入 (1.6.37)．根据(1.6.38)，有

$$0=\int_{\Omega}L^*(v)udx=\int_{\Omega}\Phi udx$$

$$-\int_{\Omega}\varepsilon\Delta vudx-\int_{\Omega}\sqrt{\varepsilon}\,a\Delta vudx \qquad (1.6.42)$$

下面我们证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，(1.6.42)的最后两个积分趋于0．完全象证定理 1.6.1 时估计积分

$$\varepsilon\int\Delta v\varphi^{\delta}udx$$

那样，借助(1.6.41)来估计积分

$$\varepsilon\int_{\Omega}\Delta vudx$$

(1.6.42) 的最后一个积分的积分域取在区域 $\sigma_2^{2\sqrt{\varepsilon}}$ 上，因为依据 $a(x,\varepsilon)$ 的定义，在这个区域外被积函数等于0，所以我们有

$$\left|\sqrt{\varepsilon}\int_{\Omega}a\Delta vudx\right|$$

$$\leqslant\sqrt{\varepsilon}\left(\int_{\Omega}a(\Delta v)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega}au^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\varepsilon^{3/2}\int_{\Omega}a(\Delta v)^2dx\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\sigma_2^{2\sqrt{\varepsilon}}}u^2dx\right)^{1/2} \qquad (1.6.43)$$

注意到不等式(1.6.41)和假设(1.6.36)，我们从(1.6.43)推得

$$\sqrt{\varepsilon}\int_{\Omega}a\Delta vudx\to 0,\ \text{当}\ \varepsilon\to 0\ \text{时}$$

所以

$$\int_\Omega u\Phi dx = 0$$

这表示，在Ω内几乎处处 $u\equiv 0$. 定理证毕.

我们注意在定理 1.6.6 中对集合Γ或Γ^2没有明显地附加任何条件. 容易验证对方程(1.6.28) 或 (1.6.33)的齐次边值问题的解，条件(1.6.36)是不满足的.

定理 1.5.1 和 1.5.2 给出了一些条件，在这些条件下，(1.5.1)，(1.5.2)的弱解具有性质

$$\frac{1}{\delta}\int_{\sigma_2^\delta}(u-\tilde{g})^2 dx \to 0, \quad 当\ \delta\to 0\ 时$$

其中，$\tilde{g}$是给定在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上的函数g向区域Ω内部的连续开拓. 假设这里的函数g在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上连续.

注 3 在定理 1.6.6 中，条件(1.6.36)可以用这样的条件代替：对 Σ_2 的内点所组成的任意闭集 G_2，

$$\frac{1}{\delta}\int_{G_2^\delta}u^2(x)dx \to 0, \quad 当\ \delta\to 0\ 时 \tag{1.6.44}$$

其中，G_2^δ 表示 G_2 的δ邻域与Ω的交集. 另外，必须假设，Σ_2在Σ上的边界点集合Γ^2可分划为不相交的闭子集 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$，它们满足定理 1.6.1 的条件1)，2) 和 3)，并且在Γ_1, Γ_2和Γ_3的δ邻域内，系数 a^{kj} 满足相应的条件(1.6.21)，(1.6.25)和(1.6.27).

这个断言可以象定理 1.6.6 那样来证明. 为此，考虑(1.6.39)，(1.6.38)的解 v^1，其中，构造函数 $a(x,\varepsilon)$ 时，用集合Σ_2在Σ上的 $\delta/2$ 邻域代替集合 σ_2. 在等式(1.6.37)中用$v^1\varphi^\delta$来代替v，其中，φ^δ是在证明定理 1.6.1 时所构造的函数. 我们有

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega L^*(v^1\varphi^\delta)u dx\\ &= \int_\Omega \varphi^\delta L^*(v^1)u dx + \int_\Omega v^1[L^*(\varphi^\delta)-c^*\varphi^\delta]u dx\\ &\quad + \int_\Omega 2a^{kj}\varphi^\delta_{x_k}v^1_{x_j}u dx\end{aligned}$$

由此推得

$$\int_{\Omega} \varphi^{\delta} \Phi u dx = \int_{\Omega} \varphi^{\delta} u[\varepsilon \Delta v^1 + \sqrt{\varepsilon}\, a \Delta v^1] dx$$
$$- \int_{\Omega} v^1 [L^*(\varphi^{\delta}) - c^* \varphi^{\delta}] u dx$$
$$- \int_{\Omega} 2 a^{kl} \varphi^{\delta}_{x_k} v^1_{x_l} u dx \qquad (1.6.45)$$

正如定理 1.6.1 和 1.6.6 的证明那样，我们证明，对于固定的 δ，选取 ε 适当小，(1.6.45)右端的第一个积分可任意小；而对于 $\varepsilon < \delta$，δ 充分小时，(1.6.45)的最后两个积分也可以任意地小。必须注意到，在 Γ^2 的 δ 邻域内，(1.6.22)左端积分的被积函数等于 0。因此在推导类似 (1.6.24) 的不等式时，我们可以考虑用函数 $(1-\varphi^{2\delta})\varphi^{3\delta/4}\eta$ 来代替函数 $(1-\varphi^{2\delta})\eta$。从而对充分小的 ε，在类似于(1.6.23)的等式中，积分

$$\int_{\Omega \cap Q^{\varepsilon}_{1,2\delta}} \sqrt{\varepsilon}\, a(x, \varepsilon) \Delta v^1 v^1 (1-\varphi^{2\delta}) \varphi^{3\delta/4} \eta dx$$

为 0，而所有的估计可以象定理 1.6.1 的证明那样来进行。

我们注意到，注 3 中所提关于 Γ^2 的条件是不能省略的，即定理 1.6.6 的条件(1.6.36)不能用条件(1.6.44)代替。实际上，在对方程(1.6.28)和(1.6.33)所做的边值问题中，由于 Σ_c 的内点的集合是空集，因而条件(1.6.44)满足。但这些问题在 $\mathscr{L}_p(p=2)$ 类中有不唯一的解。

在 § 4 和 § 5，我们构造了问题(1.3.1)，(1.3.2)在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的弱解(参看定理 1.4.1 和 1.5.4)。在[102]中证明了这种解的唯一性定理。这个定理的证明是基于对称一阶方程组理论的。

我们用 Γ' 表示集合 Σ_0，Σ_1，Σ_2 和 Σ_3 在 Σ 上的边界的和集。

定理 1.6.7 (**R. Phillips 和 L. Sarason**)假设 Γ' 由两个不相交的闭集 Γ_0 和 Γ_1 组成，并且 Γ_1 在 Σ 上的 δ 邻域的面积为 δ^2 阶，而 Γ_0 由有限个 $(m-2)$ 维光滑流形组成。假设在 Ω 内

$$2c - b^l_{x_l} + a^{kl}_{x_k x_l} \leqslant -c_1 < 0,$$

并且在 Γ_0 的每个流形的点上或者 $a^{kl}\nu_k\nu_l = 0$ 或者 $a^{kl}\nu_k\nu_l \neq 0$，其中，$\bar{\nu}$ 是在 Σ 上 Γ_0 的法向量。则在空间 $\mathscr{H}$ 中的函数 u 在 Ω 内

几乎处处等于 0，如果对于所有在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上为 0 的 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 的 v 满足

$$\int_\Omega uL^*(v)dx=0$$

我们将不给出定理 1.6.7 的证明(在 [102] 中可找到证明)，因为它很复杂；我们宁可证明一个有密切关系的定理。

定理 1.6.8 假设 Σ_2 的内点的每个闭集 G_2 有这样的邻域：在这邻域内算子 $L^*(v)$ 的所有系数有定义，并且 $a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$，$a^{kj}\in C_{(2)}$，$b^{*j}\in C_{(1)}$，$c^*\in C^{(0,\alpha)}$，$0<\alpha<1$. 假设在 $\Sigma_1\cup\Sigma_0$ 上 $\beta^*\leqslant 0$，在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c^*<0$，并且 Σ_3 和 Σ_2 的边界点集合由两个不相交的闭集 Γ_0 和 Γ_1 组成，Γ_1 在 Σ 上的 δ 邻域的面积为 δ^2 阶，而 Γ_0 由有限个 $(m-2)$ 维光滑流形组成，在每个流形上，或者

$$a^{kj}v_kv_j=0$$

或者 $a^{kj}v_kv_j\neq 0$. 如果 $\mathscr{L}_1(\Omega)$ 的函数 u 对于在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 的所有 v 满足

$$\int_\Omega uL^*(v)dx=0 \tag{1.6.46}$$

并且在 Γ_0 上 $a^{kj}v_kv_j\neq 0$ 的点的邻域内函数 u 与空间 $\mathscr{H}$ 中的某函数重合(方程 $L^*(v)=0$ 的系数可光滑延拓到 Σ_2 的邻域的条件，可以用条件(1.6.44)代替)，则 u 在 Ω 内几乎处处等于 0.

证明 设 G^δ 是 Σ_2 中与其边界的距离大于 δ 的点集. 考虑区域 Ω_δ，它包含 G^δ 的 $\delta/2$ 邻域，并且在此邻域外与 Ω 重合. 假设 $\Omega_\delta\in A^{(2,\alpha)}$，并且假设 $a_1(x)$ 是 $C_{(\infty)}(\Omega_\delta)$ 的函数：在 Ω 内 $a_1=0$，而在 $\bar\Omega_\delta\backslash\bar\Omega$ 内 $a_1>0$. 我们构造函数 $a(x,\delta)$，使得 $a(x,\delta)\in C_{(2)}(\Omega_\delta)$，在集合 $\Gamma_0\cup\Gamma_1$ 的 $\delta/2$ 邻域内 $a(x,\delta)=1$，在此集合的 δ 邻域外为 0，并且 $0\leqslant a\leqslant 1$. 在区域 Ω_δ 内考虑方程

$$\varepsilon\Delta v+a_1(x)\Delta v+a(x,\delta)\Delta v+L^*(v)=\Phi \tag{1.6.47}$$

在 Ω_δ 的边界上具有条件 $v=0$，其中 $\Phi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varepsilon=\text{const}>0$.

如果以满足条件(1.6.44) 来代替 $L^*(v)$ 的系数在 Σ_2 的邻域内可以延拓的条件，则我们考察问题

$$\varepsilon\Delta v + a(x,\delta)\Delta v + L^*(v) = \Phi,$$
$$\text{在 } \Omega \text{ 内}; \ v = 0, \ \text{在 } \Sigma \text{ 上} \qquad (1.6.48)$$

其中 $a(x,\delta) \in C^\infty(\bar{\Omega})$，在 $\Sigma_2 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 的 $\delta/2$ 邻域内 $a(x,\delta) = 1$，在这集合的 $3\delta/4$ 邻域外 $a(x,\delta) = 0$，并且 $0 \leqslant a(x,\delta) \leqslant 1$。

根据我们的假设及引理 1.5.1 和 1.6.1，对于在 Ω_δ 的边界上为 0 的 (1.6.47) 的解，估计

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_\delta} (\Delta v)^2 dx \leqslant C_1 \qquad (1.6.49)$$

成立，这里常数 C_1 不依赖于 ε，但依赖于 δ (对于 (1.6.48) 的解成立同样的不等式)。设光滑函数 $\varphi^\delta(x)$ 在 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 的 δ 邻域内等于 0，$0 \leqslant \varphi^\delta(x) \leqslant 1$，在集合 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 的某邻域 γ^δ 外 $\varphi^\delta(x) = 1$ (对于(1.6.48)的情况，在做 $\varphi^\delta(x)$ 时，我们用集合 $\Sigma_2 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 代替集合 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$)。

我们用函数 $v^1\varphi^\delta$ 代替 (1.6.46) 中的函数 v，其中 v^1 在 Ω_δ 内满足(1.6.47)，并且在这个区域的边界上为 0。我们有

$$\int_\Omega L^*(v^1\varphi^\delta) u dx = 0$$

由此得出

$$\int_\Omega \varphi^\delta \Phi u dx = \int_\Omega \varepsilon \Delta v^1 \varphi^\delta u dx$$
$$- \int_\Omega v^1 [L^*(\varphi^\delta) - c^* \varphi^\delta] u dx$$
$$- \int_\Omega 2a^{kj} \varphi^\delta_{x_k} v^1_{x_j} u dx \qquad (1.6.50)$$

这里，我们利用了在 Ω 内 $\varphi^\delta a(x,\delta) = 0$ 与 $a_1(x) = 0$ 的事实。当 δ 固定时，对于充分小的 ε，(1.6.50)右端的第一个积分可以任意小。借助(1.6.49)，完全跟证明定理 1.6.1 时估计类似积分一样，可以证明这个事实。选取特殊的 φ^δ，对于 $\varepsilon < \delta$，当 δ 充分小时，(1.6.50)右端的最后两个积分(分别用 I_1 和 I_2 来表示)可以任意小。我们注意这些积分的被积函数仅在 γ^δ 内可能不为 0。

在集合 Γ_1 的邻域内，函数 φ^δ 的构造以及在此集合的相应邻

域上的积分 I_1 和 I_2 的估计，完全象证明定理 1.6.1 时对集合 Γ_3 的那样来进行。我们只指出在推导类似(1.6.24)的不等式时，必须用 $\eta\varphi^{3\delta/4}(1-\varphi^{2\delta})v^2$ 乘(1.6.47)(或者(1.6.48))并且在 Ω_δ 上积分。

函数 φ^δ 的构造，积分域取 Γ_0 上 $a^{kj}\nu_k\nu_j=0$ 那部分的积分 I_1 和 I_2 的估计，完全象证明定理 1.6.1 时对集合 Γ_2 的那样来进行。

在 Γ_0 上 $a^{kj}\nu_k\nu_j\neq 0$ 的点集的邻域内，象证明定理 1.6.1 时在 Γ_1 的邻域内那样来构造函数 φ^δ。因为按假设，在 Γ_0 的邻域内，函数 $u(x)$ 与 $\mathscr{H}$ 的一个函数重合，并且 $a^{kj}\nu_k\nu_j\neq 0$，容易证明

$$\frac{1}{\delta^{1/2}}\int_{\gamma_1^\delta}u^2dx\to 0,\ \text{当}\ \delta\to 0\ \text{时} \qquad (1.6.51)$$

其中，γ_1^δ 表示 Γ_0 上 $a^{kj}\nu_k\nu_j\neq 0$ 的那部分点集的邻域，在此，$1-\varphi^\delta\neq 0$。为此目的，我们在 Γ_0 的点 P 的邻域内引用局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得 y_m 轴指向 Σ 的内法线方向，而 y_{m-1} 轴的方向与 ν 的方向重合。可以假设，在变换后的算子 $L^*(v)$ 中，形如 $v_{y_m y_j}$ $(j\neq m-1)$ 的导数的系数等于 0。根据在 Γ_0 的邻域内函数 $u(x)$ 与 $\mathscr{H}$ 的函数重合的事实，对充分小的 δ，推得

$$\int_{\gamma_1^\delta}u_{y_{m-1}}^2dy<\infty$$

和

$$\int_{\gamma_1^\delta}u^2dx\leqslant C_2\sqrt{\delta}\int_{\Gamma_0^\delta}(u_{y_{m-1}}^2+u^2)dy$$

其中，常数 C_2 不依赖于 δ，而 Γ_0^δ 是包含 γ_1^δ 的某区域，当 $\delta\to 0$ 时，$\mathrm{mes}\,\Gamma_0^\delta\to 0$。进一步估计积分 I_1 和 I_2 跟证明定理 1.6.1 时对 Γ_1 相应的积分那样来进行，只需用关系式（1.6.51）代替条件 $u\in\mathscr{L}_3(\Omega)$。

对于满足条件(1.6.44)的情况，在 Σ_2 的边界的邻域内，函数 φ^δ 可以类似地构造，取决于这个边界是属于 Γ_0 或 Γ_1。此外，假设 φ^δ 在距离 Σ_2 不大于 $\delta/4$ 的点上等于 0，而在沿 Σ 的法线距离 Σ_2 大于 δ 的点上 φ^δ 等于 1。从而我们得到定理 1.6.8 的证明。

容易看出，(1.3.1)，(1.3.2)的弱解在任意 $p\geqslant 1$ 的 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 类中是唯一的，如果对于任意函数 $\Phi\in C_0^\infty(\Omega)$，问题

$$L^*(v)=\Phi,\ 在\Omega内;\ v|_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}=0$$

有属于 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类的解 $v(x)$. 这种条件将在 §8 中给出.

现在证明一个对于分片光滑区域 Ω 的唯一性定理. 对这种区域存在定理 1.5.5 成立.

定理 1.6.9 假设 $\Omega\in B^{(2,\alpha)}$，假设 $\Sigma_2\cup\Sigma_0$ 的边界点集合 Γ 在 Σ 上的 δ 邻域的面积为 δ^q 阶 $(q>0)$，并且假设定理 1.6.2 中关于算子 $L^*(v)$ 的系数和函数 β^* 的假设成立. 那么在 Ω 内由积分恒等式(1.5.26)定义的(1.1.4)，(1.1.5)的广义解在有界可测函数类中是唯一的.

证明 这个定理可以象定理 1.6.1 那样进行证明. 首先，完全跟证明定理 1.6.1 一样，我们构造区域 $\Omega_\delta\in B^{(2,\alpha)}$，然后构造区域 $\tilde\Omega_\delta$，使得 $\tilde\Omega_\delta\in A^{(2,\alpha)}$，$\tilde\Omega_\delta\subset\Omega_\delta$，并且 $\tilde\Omega_\delta$ 在点集 B' 的 δ 邻域外与 Ω_δ 重合. B' 表示 B 位于 Ω_δ 的边界上的点集(集合 B 是前面在定理 1.5.5 中定义过的). 在区域 $\tilde\Omega_\delta$ 内考虑方程

$$\varepsilon\Delta v+a(x)\Delta v+a_1(x,\delta)\Delta v+L^*(v)=\Phi \quad (1.6.52)$$

其中 $a(x)$ 是这样的光滑函数：在 Ω 内 $a(x)=0$，在 $\bar\Omega_\delta\backslash\bar\Omega$ 内 $a(x)>0$；在集合 B' 的 δ 邻域内，光滑函数 $a_1(x,\delta)=1$，而在这个集合的 2δ 邻域外 $a_1(x,\delta)=0$. 在积分恒等式 (1.6.46) 中，我们用函数 $v^1\varphi^{2\delta}$ 代替函数 v，其中 v^1 是(1.6.52)的解，它在区域 $\tilde\Omega_\delta$ 的边界上等于 0，而 φ^δ 是光滑函数. 它在集合 $B'\cup\Gamma$ 的 δ 邻域内等于 0，而在这个集合的某邻域 γ^δ 外等于 1. 在 Γ 的邻域内，完全象证明定理 1.6.1 时在 Γ_3 的邻域那样来构造函数 φ^δ. 在属于 B' 并且为 Σ_1 的极限点的那些点上，如同定理 1.6.1 中对集合 Γ_1 所做的那样来构造函数 φ^δ. 对于 B' 的其它点(我们用 B_1 表示)，代替函数 φ^δ，我们选取一个光滑函数：它在 B_1 的 δ 邻域内等于 0，在 B_1 的 2δ 邻域外等于 1，且 $0\leqslant\varphi^\delta\leqslant 1$，

$$\varphi^\delta_{x_kx_j}=O(\delta^{-2}),\ \varphi^\delta_{x_j}=O(\delta^{-1}) \quad (1.6.53)$$

利用闸函数的标准技巧，可以证明，在 B_1 的邻域内 v^1 关于 ε 和

δ 是一致地小. 考虑到 v^1 的这个估计和等式(1.6.23), 我们证得

$$\int_{B_1^\delta} a^{kl} v^1_{x_k} v^1_{x_l} dx \to 0, \quad \text{当 } \delta \to 0 \text{ 时} \qquad (1.6.54)$$

其中, B_1^δ 表示集合 B_1 的 δ 邻域. 利用关系式(1.6.53)和(1.6.54), 我们估计(1.6.50)右端的积分 I_1 和 I_2.

用同样的方法,在 $B^{(2,\alpha)}$ 类区域 Ω 内,可以证明(1.1.4),(1.1.5)在空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 解的唯一性定理. 这类似于对光滑区域证过的定理 1.6.1、1.6.4、1.6.6 和 1.6.8.

§ 7. 关于非负二次形式的一个引理

在这一节中,我们证明一个与非负二次形式有关的不等式,在下一节中研究边值问题(1.1.4), (1.1.5)弱解的光滑性, 在第二章 § 6 中研究一般二阶方程的亚椭圆性, 以及在第三章 § 2 中研究有关的退化双曲型方程,都必不可少地要应用到这个引理.

引理 1.7.1 假设对于 R^m 的所有 x 和所有的 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 有 $a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geqslant 0$, 并且假设 $a^{kl}(x)\in C_{(2)}(R^m)$, 那么,对于任意的 $v\in C_{(2)}(R^m)$, 有

$$(a^{kl}_{x_p} v_{x_k x_l})^2 \leqslant M a^{kl} v_{x_l x_k} v_{x_s x_l} \qquad (1.7.1)$$

其中, M 仅与函数 a^{kl} 的二阶导数有关. (与其他各处一样, 在(1.7.1)中重复指标都假定从 1 到 m 求和)

证明 对于所有 x 值都有定义,并且属于 $C_{(2)}(R^1)$ 类的任意非负函数满足不等式

$$f_x^2 \leqslant 2\{\sup |f_{xx}|\} f \qquad (1.7.2)$$

事实上,假设这个不等式在某点 x_0 上不成立,则有

$$f_x^2(x_0) > 2\{\sup |f_{xx}|\} f(x_0), \quad f(x_0)\neq 0 \qquad (1.7.3)$$

考虑点 $\tilde{x}_0 = x_0 - 2f(x_0)/f_x(x_0)$. 由 Taylor 公式

$$f(\tilde{x}_0) = f(x_0) - 2\frac{f(x_0)}{f_x(x_0)} f_x(x_0) + 2\frac{f^2(x_0)}{f_x^2(x_0)} f_{xx}(\bar{x})$$

或

$$f(\tilde{x}_0) = -f(x_0)\left[1 - 2\frac{f(x_0)}{f_x^2(x_0)}{}_{xx}(\bar{x})\right]$$

因为依据假设不等式(1.7.3)成立，我们有

$$1 - 2\frac{f(x_0)}{f_x^2(x_0)}f_{xx}(\bar{x}) > 0$$

从而 $f(\tilde{x}_0) < 0$，这与对所有的 $fx \in R^1$，$f(x) \geqslant 0$ 的假设矛盾.

设 x' 是 R^m 的任意点. 我们作自变量变换 $y_s = \partial_{ks}x_k$，其中 α_{ks} 取这样的常数，使得 $\|\alpha_{ks}\|$ 是正交矩阵，而在点 x' 上矩阵 $\|a^k\alpha_{ks}\alpha_{tp}\|$ 是对角型的.

容易验证，对于 $v \in C^{(2)}(R^m)$，在点 x' 上等式

$$a^{kl}v_{x_kx_s}v_{x_lx_s} = \tilde{a}^{ss}v_{y_sv_p}v_{y_sy_p} \tag{1.7.4}$$

$$(a^{kl}_{x_p}v_{x_kx_l})^2 = (\tilde{a}^{sl}_{x_p}v_{y_sy_l})^2 \tag{1.7.5}$$

成立. 显然，在 R^m 的所有点上 $\tilde{a}^{sl}\xi_s\xi_l \geqslant 0$. 所以根据(1.7.2)，有

$$(\tilde{a}^{ss}_{x_p})^2 \leqslant C_1\tilde{a}^{ss},\quad 在\ R^m\ 内 \tag{1.7.6}$$

其中，常数 C_1 与 a^{kl} 的二阶导数有关. 因为在 R^m 中

$$\tilde{a}^{ss} + 2\tilde{a}^{sl} + \tilde{a}^{ll} \geqslant 0,$$

对此函数可以利用(1.7.2)，在 R^m 的所有点上，得到

$$(\tilde{a}^{sl}_{x_p})^2 \leqslant C_2(\tilde{a}^{ss} + 2\tilde{a}^{sl} + \tilde{a}^{ll}) + C_3(\tilde{a}^{ss} + \tilde{a}^{ll}) \tag{1.7.7}$$

这里 C_2 和 C_3 是常数.

在点 x' 上，当 $s \neq l$ 时 $\tilde{a}^{sl} = 0$. 因此从(1.7.7)推得在 x' 上，有

$$(\tilde{a}^{sl}_{x_p})^2 \leqslant C_4(\tilde{a}^{ss} + \tilde{a}^{ll}) \tag{1.7.8}$$

其中，常数 C_4 仅与 a^{kl} 的二阶导数有关.

对于 $C^{(2)}(R^m)$ 类的 v，从关系式(1.7.4)，(1.7.5)和估计(1.7.6)，(1.7.8)推出引理的断言. 对于 $C_{(2)}(R^m)$ 中的 v，通过极限得到(1.7.1).

不等式(1.7.2)和引理1.7.1的几个推论将在后面用到.

推论 1 设对于所有的 ξ 和 $x \in R^m$，二次形式 $a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geqslant 0$. 因此，将它看作 ξ_l 的函数，应用(1.7.2)，则得对于所有的 ξ 和

$x \in R^m$，有

$$|a^{kl}(x)\xi_k|^2 \leqslant 2a^{ll}(x)a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \qquad (1.7.9)$$

推论 2 假设 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m)$，其中 η_l 是复数．那么，对于所有的 $x \in R^m$ 和所有的复数 $\eta_1, \cdots, \eta_m$，有

$$|a^{kl}(x)\eta_k|^2 \leqslant 2a^{ll}(x)a^{kl}(x)\eta_k\bar{\eta}_l \qquad (1.7.10)$$

不等式(1.7.10)直接从(1.7.9)得出．事实上，设$\eta_k = \xi_k + i\tilde{\xi}_k$，其中 ξ_k 和 $\tilde{\xi}_k$ 是实数．则(1.7.10)可写为形式

$$|a^{kl}(x)\xi_k|^2 + |a^{kl}(x)\tilde{\xi}_k|^2 \leqslant 2a^{ll}(x)[a^{kl}(x)\xi_k\xi_l + a^{kl}(x)\tilde{\xi}_k\tilde{\xi}_l]$$

后面这个不等式是(1.7.9)的直接结果．

推论 3 假设 v 是复函数，并且

$$v \in C_{(2)}(R^m), \quad D_l = -i\partial/\partial x_l.$$

则

$$|a^{kl}_{x_p}D_kD_lv|^2 \leqslant M a^{kl}D_kD_lv\overline{D_lD_lv} \qquad (1.7.11)$$

常数M仅与函数 a^{kl} 的二阶导数有关．

如果将函数 D_kD_lv 写为形式

$$D_kD_lv = D_kD_lv_1 + iD_kD_lv_2$$

其中 v_1 和 v_2 是实函数，将这些表达式代入(1.7.11)，那么从(1.7.1)同样立即推得不等式(1.7.11)．

§ 8. 第一边值问题弱解的光滑性．存在有界导数解的条件

在本节中，我们对 § 5 所构造的问题(1.1.4)，(1.1.5)的弱解的光滑性建立一系列的定理．

用E表示 $\Omega \cup \Sigma$ 中矩阵 $\|a^{kl}\|$ 的行列式等于0的点集．我们注意到，在集合 $\Omega \backslash E$ 的每点 P 的某邻域内，问题(1.1.4)，(1.1.5)的弱解是二阶椭圆型方程的弱解，由已知的结果(参看[81，118])知道，如果在P点的某邻域内方程的系数和函数 f 属于 $C^{(k,\alpha)}$ 类，那么解在此邻域内便属于 $C^{(k+2,\alpha)}$ 类．对于Ω中的那些点，在其

邻域内方程(1.1.4)是抛物型的，而且其中一个变量 x_l 起时间的作用，成立类似的论断(参看 [37, 61])。

在第二章 § 5 和 § 6 中，我们将对(1.1.4)的系数提出很有意义的充分条件，在此条件下，问题 (1.1.4)，(1.1.5) 的弱解具有局部光滑性的类似性质.

在本节中，我们对方程的系数、Ω 的边界及函数 f 和 g 导出使弱解属于某 $C_{(k)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类的条件. 我们将利用在 § 5 中证过的弱解可用椭圆型方程(1.5.4)的解当 $\varepsilon\to 0$ 时取极限来刻划这样的事实. 因此，为了证明弱解的光滑性，我们先对方程(1.5.4)的解建立关于 ε 的一致估计.

引入记号

$$B_1(x)=c(x)+\frac{1}{4}Mm+\max_s\left\{b^s_{x_s}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m}|b^j_{x_s}|+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m}|b^s_{x_j}|\right\} \tag{1.8.1}$$

其中，M 是不等式 (1.7.1) 中的常数，它与系数 a^{kj} 的二阶导数有关.

引理 1.8.1 假设 $u_\varepsilon(x)$ 是方程

$$L_\varepsilon(u)=\varepsilon\Delta u+a^{kj}u_{x_kx_j}+b^ku_{x_k}+cu=f,\ 在\ \Omega\ 内 \tag{1.8.2}$$

及条件

$$u=g,\ 在\ \Sigma\ 上 \tag{1.8.3}$$

的解，其中，在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c<0$，并且对于所有的 ξ 有 $a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$. 此外设满足下面的条件:

1) 在 Ω 的某一区域 ω 内，系数 a^{kj}，b^k，c 和 f 属于 $C_{(1)}(\omega)$ 类；g 是有界函数，$u_\varepsilon\in C^{(0)}(\Omega\cup\Sigma)$，$u_\varepsilon\in C^{(1)}(\bar\omega)$，$u_\varepsilon\in C^{(3)}(\omega)$.

2)在 $\bar\omega$ 内不等式(1.7.1)成立(特别是，如果 $\bar\omega\subset\Omega$，而在 Ω 内系数 $a^{kj}\in C_{(2)}(\Omega)$，且对于所有的 ξ，$a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$，则此不等式总

成立).

3) 对于某 $\delta > 0$，在集合 E 的 δ 邻域 E^δ 内，成立不等式

$$\sup_{E^\delta \cap \varpi} B_1 < 0.$$

则问题 (1.8.2), (1.8.3) 的解 $u_\varepsilon(x)$ 满足估计

$$\max_{\varpi} |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2 \leqslant M_1 + \max_{\sigma} |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2 \tag{1.8.4}$$

其中，常数 M_1 与 ε 无关，而 σ 是 ω 的边界.

证明 因为在 $\Omega \cup \Sigma$ 内 $c < 0$，由极大值原理可以得到 u_ε 关于 ε 是一致有界的. 在区域 $\omega \backslash G_\delta(G_\delta = E^\delta \cap \omega)$ 内，方程(1.8.2) 关于 $\varepsilon > 0$ 是一致椭圆型的，即在 $\omega \backslash G_\delta$ 的点上满足不等式

$$a^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant \alpha_0 \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2 \tag{1.8.5}$$

其中，α_0 为与 ε 无关的正常数. 在区域 G_δ 内满足条件

$$B_1 \leqslant \alpha_1 < 0, \quad \alpha_1 = \text{const} \tag{1.8.6}$$

我们将构造一个满足 $v = p^1 + C_1 u_\varepsilon^2$ 的方程，其中 $p^1 = |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2$，而 C_1 是下面要选取的正常数.

对 x_s 微分(1.8.2)，乘以 u_{x_s} 并且对 s 从 1 至 m 求和，得到 p^1 的方程，其形式为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon\Delta p^1 - \varepsilon u_{x_k x_s} u_{x_k x_s} + \frac{1}{2} a^{kj} p^1_{x_k x_j} \\
&+ \frac{1}{2} b^k p^1_{x_k} + [-a^{kj} u_{x_s x_k} u_{x_s x_j} + a^{kj}_{x_s} u_{x_k x_j} u_{x_s}] \\
&+ b^k_{x_s} u_{x_k} u_{x_s} + c p^1 + c_{x_s} u u_{x_s} = f_{x_s} u_{x_s}
\end{aligned} \tag{1.8.7}$$

显然 u_ε 满足

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon\Delta(u^2) + \frac{1}{2} a^{kj}(u^2)_{x_k x_j} + \frac{1}{2} b^k (u^2)_{x_k} \\
&\qquad + c u^2 - \varepsilon u_{x_k} u_{x_k} - a^{kj} u_{x_k} u_{x_j} \\
&= f u
\end{aligned} \tag{1.8.8}$$

由(1.8.7)和(1.8.8),我们得到关于 v 的方程

$$\frac{1}{2}\varepsilon\Delta v+\frac{1}{2}a^{kl}v_{x_kx_l}$$

$$+\frac{1}{2}b^kv_{x_k}+cv-\varepsilon u_{x_kx_s}u_{x_kx_s}$$

$$+[-a^{kl}u_{x_sx_k}u_{x_sx_l}+a^{kl}_{x_s}u_{x_kx_l}u_{x_s}]+b^k_{x_s}u_{x_k}u_{x_s}$$

$$+c_{x_s}uu_{x_s}-\varepsilon C_1u_{x_k}u_{x_k}-C_1a^{kl}u_{x_k}u_{x_l}$$

$$=f_{x_s}u_{x_s}+C_1fu \tag{1.8.9}$$

如果 v 在区域 ω 内部的点 Q_1 上达到极大,则在此点上 $\Delta v\leqslant 0$, $a^{kl}v_{x_kx_l}\leqslant 0$ 并且 $v_{x_l}=0$。显然,对于固定的 s,不等式

$$|a^{kl}_{x_s}u_{x_kx_l}u_{x_s}|\leqslant\frac{1}{Mm}(a^{kl}_{x_s}u_{x_kx_l})^2+\frac{Mm}{4}u^2_{x_s}$$

成立,其中,M 是(1.7.1)的常数.根据引理 1 7.1,有

$$-a^{kl}u_{x_sx_k}u_{x_sx_l}+\frac{1}{Mm}\sum_{s=1}^{m}(a^{kl}_{x_s}u_{x_kx_l})^2\leqslant 0$$

因此,在 v 达到最大值的点 Q_1 上,有

$$\frac{Mm}{4}v+cv+b^s_{x_s}u^2_{x_s}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{m}|b^j_{x_s}|u^2_{x_s}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{m}|b^j_{x_s}|u^2_{x_j}+2\tau v$$

$$+\frac{1}{4\tau}\sum_{s=1}^{m}|c_{x_s}|^2u^2+\frac{1}{4\tau}\sum_{j=1}^{m}|f_{x_j}|^2$$

$$-C_1a^{kl}u_{x_k}u_{x_l}+|C_1fu|\geqslant 0 \tag{1.8.10}$$

其中 $\tau=\text{const}>0$。我们选取常数 C_1 足够大,使得在 $\omega\backslash G_\delta$ 的点上

$$-C_1\alpha_0+c+2\tau+\max\sum_{s,j=1}^{m}|b^j_{x_s}|+\frac{Mm}{4}<0$$

如果 $Q_1\in\omega\backslash G_\delta$,那么,由于这样选取 C_1,从(1.8.10)可以得到

$$v < M_1$$

其中，常数 M_1 与 ε 无关. 如果 $Q_1 \in G_\delta$，那么，选取充分小的 $\tau > 0$，并考虑到条件 (1.8.6)，我们从 (1.8.10) 也可以推得 $v \leqslant M_1$. 从而证得估计(1.8.4).

引理 1.8.2 假设对某区域 $\omega \subset \Omega$，不等式(1.7.1) 成立，并且系数 a^{kj}，b^k，c 和 f 属于 $C_{(\mu)}(\bar{\omega})$，在 $\bar{\Omega}$ 内 $c < 0$. 令 $\bar{S}_l = (s_1, \cdots, s_l)$，$s_i$ 取遍 $1, \cdots, m$. 假设对于任意的 $l \leqslant \mu$，不等式

$$\sup_{E^\delta \cap \bar{\omega}} B_l < 0 \tag{1.8.11}$$

成立，其中，E^δ 是集合 E 的 δ 邻域，而且

$$\begin{aligned} B_l = c &+ \frac{1}{4} M m l \\ &+ \max_{\bar{S}_l} \left\{ \sum_{\rho=1}^{l} b^{s_\rho}_{x_{s_\rho}} + \sum_{\substack{\rho,\mu=1 \\ \rho \neq \mu}}^{l} a^{s_\rho s_\mu}_{x_{s_\rho} x_{s_\mu}} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{l} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s_\rho}}^{m} \left(|b^k_{x_{s_\rho}}| + |b^{s_\rho}_{x_k}| \right) \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{\rho,\kappa=1}^{l} \sum_{k,j=1}^{m} \left(|a^{kj}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}}| + |a^{s_\rho s_\kappa}_{x_k x_j}| \right) \right\} \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

最后的和式以

$$\rho < \kappa, \ (k, j) \neq (s_\rho, s_\kappa), \ (j, k) \neq (s_\rho, s_\kappa)$$

为条件，那么，对于 $u_\varepsilon \in C^{(\mu+2)}(\omega)$，$u_\varepsilon \in C^{(\mu)}(\bar{\omega})$ 的问题 (1.8.2)，(1.8.3) 的解 u_ε，估计

$$\max_{\bar{\omega}} p^l \leqslant M_l + \sum_{\nu=1}^{l} \max_{\sigma} p^\nu, \ l \leqslant \mu \tag{1.8.13}$$

成立，其中 $p^l = \Sigma_{\bar{S}_l}(D_{\bar{S}_l} u_\varepsilon)^2$，$D_{\bar{S}_l} = (\partial/\partial x_{s_1}) \cdots (\partial/\partial x_{s_l})$，$M_l$ 是与 ε 无关的常数，而 σ 是 ω 的边界.

证明 我们用归纳法证明 (1.8.13). 对于 $\mu = 1$，这个不等式在引理 1.8.1 中已经被证明过. 设(1.8.13)对于 $l \leqslant \mu_0$ 与 $1 \leqslant$

$\mu_0 < \mu$ 的 p^l 成立，我们来证(1.8.13)对于 μ_0+1 也成立。将算子 $D_{\bar{S}_l}$ 作用于方程(1.8.2)的两端，并且用 $D_{\bar{S}_l}u$ 乘所得的方程，再对所有可能的 $\bar{S}_l=(s_1,\cdots,s_l)$，$s_j=1,\cdots,m$ 求和。用 p^l 表示 u_ε 的所有 l 阶导数的平方和，由此我们得到下面关于 p^l 的方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon\Delta p^l-\varepsilon\sum_{\bar{S}_l}D_{\bar{S}_l}u_{x_k}D_{\bar{S}_l}u_{x_k}\\
&+\frac{1}{2}a^{kl}p^l_{x_kx_l}+\frac{1}{2}b^kp^l_{x_k}+cp^l\\
&-\sum_{\bar{S}_l}a^{kl}D_{\bar{S}_l}u_{x_k}D_{\bar{S}_l}u_{x_l}\\
&+\sum_{\bar{S}_l}\sum_{\rho=1}^{l}a^{kl}_{x_{s_\rho}}D_{\bar{S}_{l-1}}u_{x_kx_l}D_{\bar{S}_l}u\\
&+\sum_{\bar{S}_l}\sum_{\substack{\rho,\mu=1\\ \rho<\mu}}^{l}a^{kl}_{x_{s_\rho}x_{s_\mu}}D_{\bar{S}_{l-2}}u_{x_kx_l}D_{\bar{S}_l}u\\
&+\sum_{\bar{S}_l}\sum_{\rho=1}^{l}b^k_{x_{s_\rho}}D_{\bar{S}_{l-1}}u_{x_k}D_{\bar{S}_l}u\\
&+\sum_{\bar{S}_l}D_{\bar{S}_l}uR_{\bar{S}_l}u=0 \qquad (1.8.14)
\end{aligned}
$$

其中用 $R_{\bar{S}_l}u$ 表示有估计

$$
|R_{\bar{S}_l}u|^2\leqslant K_1\sum_{\nu=1}^{l-1}p^\nu+K_2
$$

的项，常数 K_1，K_2 与 ε 无关。设 $v=p^{\mu_0+1}+C_{\mu_0}p^{\mu_0}$，其中 C_{μ_0} 是常数，将在后面选取。借助于当 $l=\mu_0$ 和 $l=\mu_0+1$ 的(1.8.14)，我们得到关于 v 的方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon\Delta v+\frac{1}{2}a^{kl}v_{x_kx_l}+\frac{1}{2}b^kv_{x_k}+cv\\
&-C_{\mu_0}\varepsilon\sum_{\bar{S}_{\mu_0}}D_{\bar{S}_{\mu_0}}u_{x_k}D_{\bar{S}_{\mu_0}}u_{x_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \varepsilon \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u_{x_k} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u_{x_k} \\
&- C_{\mu_0} \sum_{\bar{s}_{\mu_0}} a^{kl} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_k} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_l} \\
&- \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} a^{k} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u_{x_k} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u_{x_l} \\
&+ \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u R_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u + Q_1^{\mu_0} \\
&+ \Big[\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} \sum_{\rho=1}^{\mu_0+1} a^{kl}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_k x_l} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u \\
&+ C_{\mu_0} \sum_{\bar{s}_{\mu_0}} \sum_{\rho=1}^{\mu_0} a^{kl}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{\mu_0-1}} u_{x_k x_l} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u \quad \Big] \\
&+ \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} \Bigg\{ \sum_{\substack{\rho,\kappa=1 \\ \rho<\kappa}}^{\mu_0+1} a^{kl}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}} D_{\bar{s}_{\mu_0-1}} u_{x_k x_l} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u \\
&+ \sum_{\rho=1}^{\mu_0+1} b^{k}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_k} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u \quad \Bigg\} = 0 \qquad (1.8.15)
\end{aligned}
$$

其中项 Q_1^l 有估计

$$
|Q_1^l| \leqslant K_3 \sum_{\nu=1}^{l} p^{\nu} + K_4
$$

常数 K_3，K_4 与 ε 无关．显然不等式

$$
\begin{aligned}
|a^{kl}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_l} D_{\bar{s}_l} u| &\leqslant \frac{\gamma}{2Mml} (a^{kl}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_l})^2 \\
&+ \frac{Mml}{2\gamma} (D_{\bar{s}_l} u)^2 \qquad (1.8.16)
\end{aligned}
$$

成立，其中 $\gamma = \text{const} > 0$． 我们利用引理 1.7.1 来估计(1.8.16)右端的第一项．显然

$$\sum_{\bar{s}_l} a^{kj} D_{\bar{s}_l} u_{x_k} D_{\bar{s}_l} u_{x_j} = \sum_{\bar{s}_{l-1}} a^{kj} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_\rho} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_j x_\rho}$$

和式

$$\sum_{\bar{s}_l} \sum_{\rho=1}^{l} a^{kj}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_j} D_{\bar{s}_l} u$$

可以包含相同因子 $D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_j}$ 的项，但不多于 ml 项。因此根据(1.7.1)，有

$$\frac{1}{Mml} \sum_{\bar{s}_l} \sum_{\rho=1}^{l} (a^{kj}_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_j})^2$$

$$\leqslant \sum_{\bar{s}_{l-1}} a^{kj} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_k x_\rho} D_{\bar{s}_{l-1}} u_{x_j x_\rho} \qquad (1.8.17)$$

我们利用对应于 $l=\mu_0$ 和 $l=\mu_0+1$ 以及 γ 分别等于 1 和 2 的不等式(1.8.16)，(1.8.17)来估计(1.8.15)左端方括号内的项。

在下面的和式中，我们假定 $(k, j) \neq (s_\rho, s_\kappa)$，$(j, k) \neq (s_\rho, s_\kappa)$，$\rho < \kappa$。那么

$$\left| \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} \sum_{\rho,\kappa=1}^{\mu_0+1} a^{kj}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}} D_{\bar{s}_{\mu_0-1}} u_{x_k x_j} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} \left\{ \sum_{\rho,\kappa=1}^{\mu_0+1} \sum_{k,j=1}^{m} |a^{kj}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}}| |D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u|^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{\rho,\kappa=1}^{\mu_0+1} |a^{kj}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}}| |D_{\bar{s}_{\mu_0-1}} u_{x_k x_j}|^2 \right\}$$

最后的和式可写为形式

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}} \sum_{\rho,\kappa=1}^{\mu_0+1} \sum_{k,j=1}^{m} |a^{s_\rho s_\kappa}_{x_k x_j}| (D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u)^2$$

此外，显然有估计

$$\left|\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{\substack{\rho=1\\ s_\rho\neq k}}^{\mu_0+1} b^k_{x_{s_\rho}} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_k} D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{\rho=1\\ s_\rho\neq k}}^{\mu_0+1} |b^k_{x_{s_\rho}}|(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u)^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\bar{s}_{\mu_0}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{\rho=1\\ s_\rho\neq k}}^{\mu_0+1} |b^k_{x_{s_\rho}}|(D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_k})^2.$$

我们将最后的和式写为形式

$$\frac{1}{2}\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{\substack{\rho=1\\ k\neq s_\rho}}^{\mu_0+1}\sum_{k=1}^{m} |b^{s_\rho}_{x_k}|(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u)^2.$$

现假设 v 在 ω 内部的点 Q_1 上取到它的最大值．那么，从 (1.8.15) 和上面所得的估计，可以得到，在点 Q_1 上有

$$\frac{Mm(\mu_0+1)}{4}v+cv+\tau v$$

$$-\frac{1}{2}C_{\mu_0}\sum_{\bar{s}_{\mu_0}} a^{kl} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_k} D_{\bar{s}_{\mu_0}} u_{x_l}$$

$$+\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{\substack{\rho,\kappa=1\\ \rho\neq\kappa}}^{\mu_0+1} a^{s_\rho s_\kappa}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}}(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u)^2$$

$$+\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{\rho=1}^{\mu_0+1} b^{s_\rho}_{x_{s_\rho}}(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u)^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{\rho,\kappa=1}^{\mu_0+1}\sum_{k,l=1}^{m}\{|a^{kl}_{x_{s_\rho} x_{s_\kappa}}|(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}} u)^2$$

$$\rho<\kappa,\ (k,l)\neq(s_\rho,s_\kappa),\ (l,k)\neq(s_\rho,s_\kappa)$$

$$+ |a_{x_k x_j}^{s_\rho s_\varepsilon}|(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}}u)^2\}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\bar{s}_{\mu_0+1}}\sum_{\rho=1}^{\mu_0+1}\sum_{\substack{k=1\\k\neq s_\rho}}^{m}\{|b_{x_{s_\rho}}^{k}|(D_{\bar{s}_{\mu_0+1}}u)^2$$

$$+ |b_{x_k}^{s_\rho}|(D_{s_{\mu_0+1}}u)^2\} + Q_2^{\mu_0} \geqslant 0 \tag{1.8.18}$$

其中，τ 是任意小的正数．如果 Q_1 属于 $\omega\backslash E^\delta$，则对于充分大的 C_{μ_0}，由 (1.8.18) 推得在点 Q_1 上

$$v < M_{\mu_0+1} \tag{1.8.19}$$

其中，常数 M_{μ_0+1} 与 ε 无关．但是如果 $Q_1 \in E^\delta$，那么，记住条件(1.8.11)，从(1.8.18)我们看到：在点 Q_1 上(1.8.19)也满足．因此，对于 $l = \mu_0 + 1$，(1.8.13)成立．引理证毕．

引理 1.8.3 假设 σ_1 是 Σ 上这样的闭点集：在 σ_1 的邻域内 $g = 0$，在 σ_1 的每点上，或者 $a^{kl}n_k n_l \neq 0$ 或者 $\beta < 0$，其中函数 β 是由(1.5.6)定义的．假设 $\Omega \in A_{(2)}$，方程(1.8.2)的系数和函数 f，g 在 $\bar{\Omega}$ 上有界，并且问题 (1.8.2)，(1.8.3) 的解 u_ε 属于 $C^{(0)}(\bar{\Omega})$，并在 σ_1 的点上有连续的一阶导数，同时在 $\bar{\Omega}$ 上 $c < 0$．那么

$$\max_{\sigma_1}|\text{grad}\, u_\varepsilon| \leqslant C_1 \tag{1.8.20}$$

其中常数 C_1 与 ε 无关．

证明 假设点 P_1 属于 σ_1．在点 P_1 的邻域内引进局部坐标 y_1，$\cdots$，y_m，其原点在 P_1 上，并且在 P_1 附近，由(1.5.5)给定的曲面 Σ 位于平面 $y_m = 0$ 上．设在 Ω 的点上 $y_m > 0$．对于新坐标，方程(1.8.2)取形式

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon\mu^{kl}u_{y_k y_l} + \varepsilon\nu^k u_{y_k} + \alpha^{kl}u_{y_k y_l}$$
$$+ \beta^k u_{y_k} + cu = f \tag{1.8.21}$$

根据假设，在 σ_1 的点上或者 $\alpha^{mm} > 0$ 或者 $\beta^m < 0$．设 $\phi(y_1,\cdots,y_{m-1})$是光滑函数：定义在 Σ 且属于点 P_1 的 2δ (δ 充分小) 邻域的点集上，在 P_1 的 $\delta/2$ 邻域内 $\phi = 1$，而在 P_1 的 δ 邻域外 $\phi = 0$，同时 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$．在闭区域 $Q_{\delta,\tau}\{0 \leqslant y_m \leqslant \tau\phi\}$ 内，考虑函数 $w = e^{\gamma(\tau\phi - y_m)}$．我们有

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon(w) = e^{\gamma(\tau\phi - y_m)}\Big[& \sum_{k,l=1}^{m-1} (\varepsilon\mu^{kl}\gamma^2\tau^2\phi_{y_k}\phi_{y_l} + \varepsilon\mu^{kl}\gamma\tau\phi_{y_ky_l}) \\
& + \varepsilon\mu^{mm}\gamma^2 - 2\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon\mu^{km}\gamma^2\tau\phi_{y_k} \\
& + \sum_{k,l=1}^{m-1} (\alpha^{kl}\gamma^2\tau^2\phi_{y_k}\phi_{y_l} + \alpha^{kl}\gamma\tau\phi_{y_ky_l}) \\
& + \alpha^{mm}\gamma^2 - 2\sum_{k=1}^{m-1} \alpha^{km}\gamma^2\tau\phi_{y_k} \\
& + \varepsilon\sum_{k=1}^{m-1} \nu^k\gamma\tau\phi_{y_k} - \varepsilon\nu^m\gamma \\
& + \sum_{k=1}^{m-1} \beta^k\gamma\tau\phi_{y_k} - \beta^m\gamma + c \Big] \qquad (1.8.22)
\end{aligned}
$$

因为在 $Q_{\delta,\tau}$ 的每点上，对于充分小的 δ 和 τ，或者 $\alpha^{mm} > 0$，或者 $\beta^m < 0$。容易看出，当选取 τ 充分小而 γ 充分大时，在 $Q_{\delta,\tau}$ 内有 $L_\varepsilon(w) > \max|f|$. 在这过程中，$\tau$ 和 γ 可以选取与 ε 无关. 因此函数 $v_\pm = w \pm u_\varepsilon$ 只能在 $Q_{\delta,\tau}$ 的边界上取到正的极大. 在 Σ 的点上，$v_\pm = e^{\gamma\tau\phi}$，而在 $Q_{\delta,\tau}$ 的边界的其余部分 $v_\pm = 1 \pm u_\varepsilon$. 由于 u_ε 关于 ε 一致有界，因此我们可以取常数 γ 充分大，使得 $e^{\gamma\tau} > 1 + \max\limits_{\bar{\Omega}} |u_\varepsilon|$. 这表示函数 $v_\pm$ 在 P_1 的 $\delta/2$ 邻域内(此处 $\phi = 1$)的点上当 $y_m = 0$ 时取到正的最大值. 因此在这些点上

$$
(v_\pm)_{y_m} \leqslant 0, \quad |u_{\varepsilon y_m}| \leqslant \gamma e^{\gamma\tau}
$$

因为对于 $j \neq m$ 有 $u_{\varepsilon y_j} = 0$，所以从对 $u_{\varepsilon y_m}$ 所得的估计推得引理的论断.

引理 1.8.4 令 σ_1 是 Σ 上这样的闭点集：在 σ_1 的邻域内 $g = 0$，在 σ_1 的每点上 $a^{kl}n_kn_l \neq 0$. 假设 $\Omega \in A^{(\mu+2)}$，方程(1.8.2)的系数和函数 f 属于 $C_{(\mu)}(\Omega)$，$\mu \geqslant 1$，g 是有界函数，并且问题(1.8.2)，(1.8.3)的解 $u_\varepsilon(x)$ 属于 $C^{(\mu+2)}(\Omega)$ 假设在 $\bar{\Omega} \cap E$ 的点上，由(1.8.12)定义的函数 B_l 当 $l \leqslant \mu$ 时是负的. 最后，假设对于区

域 Ω, (1.7.1)成立，并且在 $\bar{\Omega}$ 上 $c<0$. 那么，对于 $l\leqslant\mu$, 在集合 σ_1 的每点上，有

$$p^l\leqslant M_l+C_l\sqrt{\max p^l} \tag{1.8.23}$$

其中，常数 M_l, C_l 仅依赖于 $\max\limits_{\Omega}|u|$ 和 $\max\limits_{\Sigma}p^\nu(\nu\leqslant l-1)$;

$$p^\nu=\Sigma_{\bar{\xi}_\nu}(D_{\bar{\xi}_\nu}u_\varepsilon)^2.$$

证明 因为在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c<0$, 我们知道 u_ε 是关于 ε 一致有界. 对于 $\mu=1$, 常数 $C_1=0$ 的不等式(1.8.23)在引理 1.8.3 中已经证明过. 我们现在对于 $\mu=2$ 证明(1.8.23). 对于 $\mu>2$ 证明可以类似进行. 假设点 P_1 属于 σ_1. 在点 P_1 的邻域内引进局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$, 使得 σ_1 位于平面 $y_m=0$ 内，而在 Ω 的点上 $y_m>0$. 在区域 $Q_\delta\{0<y_m<\kappa\phi/\gamma\}$ 内考虑函数 $w=e^{-\gamma y_m+\kappa\phi}$, 其中 $\phi(y_1,\cdots,y_{m-1})$ 是在证明引理 1.8.3 时定义的函数，而 γ 和 κ 都是常数. 令 $K_0=\max_{\bar{Q}_{\delta,\rho}}|u_\varepsilon y_\rho|$. 选取 κ 充分大，使得不等式 $e^\kappa>1+K_0$ 成立. 在坐标 $y_1,\cdots,y_m$ 中，对于 $\gamma\geqslant\gamma_0$, 有

$$\begin{aligned}L_\varepsilon(w)&=e^{-\gamma y_m+\kappa\phi}\Big[\varepsilon\mu^{mm}\gamma^2-2\varepsilon\sum_{k=1}^{m-1}\mu^{mk}\gamma\kappa\phi_{y_k}\\&+\varepsilon\sum_{k,j=1}^{m-1}(\mu^{kj}\kappa^2\phi_{y_k}\phi_{y_j}+\mu^{kj}\kappa\phi_{y_ky_j})\\&-\varepsilon\nu^m\gamma+\varepsilon\sum_{k=1}^{m-1}\kappa\nu^k\phi_{y_k}+\alpha^{mm}\gamma^2\\&-2\sum_{k=1}^{m-1}\alpha^{mk}\gamma\kappa\phi_{y_k}+\sum_{k,j=1}^{m-1}\alpha^{kj}\kappa^2\phi_{y_k}\phi_{y_j}\\&+\sum_{k,j=1}^{m-1}\alpha^{kj}\kappa\phi_{y_ky_j}-\beta^m\gamma\\&+\sum_{k=1}^{m-1}\beta^k\kappa\phi_{y_k}+c\Big]\geqslant a_0\gamma^2\end{aligned}$$

其中 γ_0 是充分大的数，$a_0>0$，而且 a_0 和 γ_0 都与 ε 无关。

假设 $\rho\neq m$。对 y_ρ 微分(1.8.21)，得到

$$L_\varepsilon(u_{y_\rho})=f_{y_\rho}-\alpha^{kl}_{y_\rho}u_{y_ky_l}-\beta^k_{y_\rho}u_{y_k}$$
$$-\varepsilon\mu^{kl}_{y_\rho}u_{y_ky_l}-\varepsilon\nu^k_{y_\rho}u_{y_k}-c_{y_\rho}u \qquad (1.8.24)$$

根据 $l=2$ 的不等式(1.8.13)(在 $\bar{\Omega}\cap E^\delta$ 上，对 $t=1,2$ 的 $B_t<0$ 的条件下的引理 1.8.2，已经证明了这个不等式)，从 (1.8.24)推得

$$|L_\varepsilon(u_{\varepsilon y_\rho})|\leqslant K_1+K_2\sqrt{\max_\Sigma p^2}$$

其中，正的常数 K_1 和 K_2 依赖于 $\max\limits_\Sigma p^1$。令

$$\gamma=\gamma_0+(a_0^{-1}(K_1+K_2\sqrt{\max_\Sigma p^2}))^{1/2}$$

考虑函数 $v_\pm=w\pm u_{\varepsilon y_\rho}$，$\rho\neq m$。显然，在 Q_δ 内有

$$L_\varepsilon(w\pm u_{\varepsilon y_\rho})\geqslant a_0\gamma^2-(K_1+K_2\sqrt{\max_\Sigma p^2})>0$$

因为在 $\Omega\cup\Sigma$ 内 $c<0$，由极大值原理，函数 $v_\pm$ 在 Q_δ 的边界上取正的最大值。在 $\phi=1$ 的那部分边界上 $v_\pm=e^\kappa$，而在位于平面 $y_m=0$ 的其余边界上 $v_\pm\leqslant e^\kappa$。选取常数 κ，使得对

$$y_m=\kappa\phi/\gamma,$$

满足不等式

$$v_\pm\leqslant 1+\max_{\bar{Q}_\delta}|u_{\varepsilon y_\rho}|\leqslant 1+K_0<e^\kappa$$

因此 $v_\pm$ 在 $\phi=1$ 的 $y_m=0$ 上取正的最大值。从而在点 P_1 上有

$$(v_\pm)_{y_m}\leqslant 0 \quad 和 \quad |u_{\varepsilon y_\rho y_m}|\leqslant\gamma e^\kappa$$

因为在点 P_1 上 $a^{mm}\neq 0$，所以从 (1.8.21) 推得，在 P_1 上

$$|u_{\varepsilon y_my_m}|\leqslant K_3+K_4\sum_{\rho=1}^{m-1}|u_{\varepsilon y_\rho y_m}|\leqslant K_3+K_5\gamma$$

其中，常数 K_3，K_4 和 K_5 依赖于 $\max\limits_\Sigma p^1$。因此通过选择常数 γ，我们得到在点 P_1 上所要证明的不等式

$$p^1\leqslant M_2+C_2\sqrt{\max_\Sigma p^2}$$

对于 $l>2$，用同样方法可以得到估计(1.8.23)。我们首先在点 P_1 估计仅含关于 y_m 微分的 l 阶导数，然后利用方程 (1.8.2) 和它关于 $y_1,\cdots,y_m$ 微分所得的方程，求出其余的 l 阶导数估计．从而引理证毕．

引理 1.8.1 和 1.8.4 的一个简单推论是关于(1.1.4)，(1.1.5)的广义解存在一阶有界导数的定理．

注 1 在引理 1.8.4 的条件下，对于 $l\leqslant\mu$，不等式

$$p^l\leqslant M_l+C_l\sqrt{\max_{Q_1}p^l}$$

在集合 σ_1 的每点上都成立，其中 Q_1 是 σ_1 的某邻域，M_l 和 C_l 依赖于 $\max_{\Omega}|u_\delta|$ 及 $\max_{Q_1}p^\nu$，$\nu\leqslant l-1$．后面在证明定理 1.8.3—1.8.8 时，我们将用到这个附注．

定理 1.8.1 假设区域 Ω 的边界 Σ 是这样的：$\overline{\Sigma_2\cup\Sigma_3}$ 与 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 没有公共点并且 $\Omega\in A_{(2)}$．假设在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上 $g=0$．此外，设满足下列条件：

1) 方程 (1.1.4) 的系数和函数 f 属于 $C_{(1)}(\Omega\cup G_{\delta_1})$ 类(对某 $\delta_1\neq 0$)，其中 G_{δ_1} 是集合 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 的 δ_1 邻域，而在 $\Omega\cup G_{\delta_1}$ 内，对于所有的 ξ 有 $a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$．

2) 对于某 $\delta>0$，不等式

$$\sup_{E^\delta\cap(\Omega\cup G_{\delta_1})}B_1<0$$

成立，其中 E^δ 是 $\det\|a^{kj}\|=0$ 的点集的 δ 邻域．

3) 在 Σ_2 的点上，(1.5.6)定义的函数 β 是负的，在 $\overline{\Omega\cup G_{\delta_1}}$ 中 $c<0$，并且定理 1.6.2 关于弱解唯一性的假设是满足的．

4) 在 $\Omega\cup G_{\delta_1}$ 的点上不等式 (1.7.1) 成立．(条件 4)可以用要求在 $\bar\Omega$ 的某邻域内 $a^{kj}\in C_{(2)}$ 且对于所有的 ξ 有 $a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$ 来代替．)

那么，问题 (1.1.4)，(1.1.5) 的弱解在 $\bar\Omega$ 中满足 Lipschitz 条件．

证明 我们考虑一个这样的区域 Ω_1；$\Omega_1\subset(\Omega\cup G_{\delta_1})$，而且 Ω_1

包含 $\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Omega$，且 Ω_1 的边界(记为 S_1) 包含 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$. 假设 $\Omega^1\in A_{(2)m}$. 在 Ω_1 内考虑方程

$$\varepsilon\Delta u+a\Delta u+L(u)=f \tag{1.8.25}$$

其中，$a(x)$ 是这样的光滑函数：在 Ω 内 $a=0$，而在 $\Omega_1\setminus\Omega$ 内 $a>0$. 假设函数 u_ε 是满足条件

$$u|_{S_1}=0 \tag{1.8.26}$$

的方程 (1.8.25) 的解. 因为在 S_1 上,或者 $a^{kl}n_kn_l+an_kn_l\neq 0$ 或者 $\beta<0$，从引理 1.8.3 和 1.8.1 推得：函数 $u_\varepsilon(x)$ 的一阶导数在 Ω_1 内关于 ε 一致有界. 象证明定理 1.5.1 时所指出的那样：当 $\varepsilon\to 0$ 时,函数 $u_\varepsilon(x)$ 收敛于弱解 $u(x)$，对于在 $S_1\setminus\Sigma_2$ 上等于 0 的任意函数 $v\in C^{(2)}(\bar{\Omega}_1)$，$u(x)$ 满足积分恒等式

$$\int_{\Omega_1}\Delta(av)udx+\int_{\Omega_1}L^*(v)udx$$
$$=\int_{\Omega_1}fvdx \tag{1.8.27}$$

容易证明，$u(x)$ 也是区域 Ω 内问题(1.1.4)，(1.1.5)(但在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上 $g=0$) 的弱解,即对于在 $\Sigma_1\cup\Sigma_3$ 上等于 0 的且在 $C^{(2)}(\bar{\Omega})$ 中的任意函数 v，积分恒等式

$$\int_\Omega L^*(v)udx=\int_\Omega fvdx \tag{1.8.28}$$

成立. 从 (1.8.27) 推得对于在 Σ_3 上和 $\bar{\Omega}_1\setminus\Omega$ 内等于 0 的 $C^{(2)}(\bar{\Omega})$ 中的任意函数 v，积分恒等式 (1.8.28)成立. 设 v_1 是在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于 0 的 $C^{(2)}(\bar{\Omega})$ 中的任意函数. 那么,在(1.8.28)中，我们用函数 $v_1\varphi^\delta$ 代替 $v(x)$，其中函数 φ^δ 无穷次可微，在 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 的 δ 邻域和 $\Omega_1\setminus\Omega$ 内 $\varphi^\delta=0$，而在集合 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 的 2δ 邻域外的 Ω 的点上，$\varphi^\delta=1$ 且 $0\leqslant\varphi^\delta\leqslant 1$. 我们还假设对于局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，函数 φ^δ 仅与 y_m 有关，并且

$$|\varphi^\delta_{y_m}|=O(\delta^{-1}),\quad|\varphi^\delta_{y_my_m}|=O(\delta^{-2})$$

我们有

$$\int_\Omega L^*(v_1)\varphi^\delta udx+\int_\Omega(L^*(\varphi^\delta)-C^*\varphi^\delta)v_1udx$$

$$+ 2\int_{\Omega} a^{kj}\varphi^{\delta}_{x_k} v_{1x_j} u dx = \int_{\Omega} f v_1 \varphi^{\delta} dx \tag{1.8.29}$$

我们证明：当 $\delta \to 0$ 时后面这个等式就化为(1.8.28)(取函数 $v = v_1$)．为此只需证明(1.8.29)左端的最后两个积分当 $\delta \to 0$ 时趋于0．显然，这两个积分是在 $h_{2\delta}$ 上求积的，其中 $h_{2\delta}$ 表示 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 的 2δ 邻域，在 $h_{2\delta}$ 内 $\varphi^{\delta}_{x_k}$ 和 $\varphi^{\delta}_{x_k x_j}$ 可能不为0．对这些积分，利用局部坐标 $y_1, \cdots, y_m$ 使边界 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 展成平面 $y_m = 0$．因为 φ^{δ} 仅与 y_m 有关，所以这些积分有形式

$$\int_{h_{2\delta}} (\alpha^{mm}\varphi^{\delta}_{y_m y_m} + \beta^{*m}\varphi^{\delta}_{y_m}) v_1 u \kappa dy$$

$$+ \int_{h_{2\delta}} \alpha^{mm}\varphi^{\delta}_{y_m} v_{1y_m} u \kappa dy \tag{1.8.30}$$

其中，在 Σ_0 的内点上，$\alpha^{mm} = O(\delta^2)$，$\beta^{*m} = 0$，而 κ 是某有界函数．由假设，在 Σ_1 的点上 $v_1 = 0$．因为区域 $h_{2\delta}$ 的测度是 δ 阶，显然可以推得：当 $\delta \to 0$ 时，积分(1.8.30)趋于0．定理证毕．

定理 1.8.2 假设：

1) 对区域Ω的边界 Σ，集合 $\bar{\Sigma}_2$，$\bar{\Sigma}_3$，$\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 两两不相交，$\Omega \in A^{(\mu+2)}$；在 $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 上 $g = 0$.

2) 对于某 $\delta_1 > 0$，方程(1.1.4)的系数和函数 f 在 $\Omega \cup G^1_{\delta_1}$ 内属于 $C_{(\mu)}$ 类，而在 $G^2_{\delta_1}$ 内属于 $C_{(2\mu+1)}$ 类，这里 $G^1_{\delta_1}$ 是 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 的 δ_1 邻域，$G^2_{\delta_1}$ 是 Σ_2 的 δ_1 邻域；在 $\Omega \cup G^1_{\delta_1} \cup G^2_{\delta_1}$ 内，对于任意的 ξ 和 $\mu \geqslant 2$ 亦有 $a^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant 0$.

3) 对于某 $\delta > 0$，不等式

$$\sup_{E^{\delta} \cap (\Omega \cup G^1_{\delta_1} \cup G^2_{\delta_1})} B_l < 0 \tag{1.8.31}$$

在 $l \leqslant \mu$ 时成立.

4) 在区域 $\Omega \cup G^1_{\delta_1} \cup G^2_{\delta_1}$ 内，不等式(1.7.1)成立，或者在Ω的某邻域内 $a^{kj} \in C_{(2)}$ 且 $a^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant 0$；同时在 $\Omega \cup G^1_{\delta_1} \cup G^{2\prime}_{\delta_1}$ 内 $c < 0$.

5) 定理 1.6.2 的假设成立.

那么，问题(1.1.4)，(1.1.5)的弱解 $u(x)$ 属于 $C_{(\mu)}(\bar{\Omega})$.

证明 考虑一个区域 Ω_1，使得 $\Omega_1\subset(\Omega\cup G^1_{\delta_1}\cup G^2_{\delta_1})$，并且 Ω_1 包含 $\Sigma_2\cup\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Omega$，而 Ω_1 的边界(记为 S_1)包含 Σ_3，假设 $\Omega_1\in A^{(\mu+2)}$.

在区域 Ω_1 内作函数 w，使得 $L(w)-f$ 连同其直到 $\mu-1$ 阶的导数在 Σ_2 上都为 0. 我们先在 Σ_2 的边界的任意点 P_1 的邻域内局部地构造 w. 为此，在点 P_1 的邻域内引进局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得 Σ_2 的边界位于平面 $y_m=0$ 内. 在此邻域内对于新坐标，方程(1.1.4)取形式

$$L(u)\equiv\alpha^{kj}u_{y_ky_j}+\beta^ku_{y_k}+cu=f \qquad (1.8.32)$$

在 Σ_2 的点上，显然 $\alpha^{mm}=0$，而由条件 2)，对于 $j=1,\cdots,m$ 和 $k\neq m$ 有 $\alpha^{mj}_{y_k}=0$，而且 $\alpha^{mm}_{y_m}=0$，因此 $b=\beta^m-\alpha^{mj}_{y_j}=\beta^m<0$. 假设在 Σ_2 上 $u=0$. 从(1.8.32)和它关于 y_m 微分后所得到的方程，在 Σ_2 上我们可以得到 u 关于 y_m 的直到 μ 阶的导数. 在 P_1 的邻域内，我们取 w 为 y_m 的 μ 次多项式，使得在 Σ_2 上与 u 重合，并且其所有直到 μ 阶的导数也与 u 的同阶导数重合. 显然 $L(w)-f=\Psi$，其中 $\Psi=O(y_m^\mu)$ 并且 Ψ 属于 $C_{(\mu)}$ 类.

为了在整个 Ω_1 内构造函数 w，我们用区域 $\omega_j(j=1,\cdots,N)$ 来覆盖区域 $\bar{\Omega}_1$，使得：如果 ω_j 包含 Σ_2 的点，则在区域 ω_j 内可以引用局部坐标 y 并且可以象上面在点 P_1 的邻域内构造函数那样来定义函数 w_j. 而在那些不含 Σ_2 的点的区域 ω_j 内令 $w_j=0$. 假设 $\{\psi_j\}$ 是对应于用区域 ω_j 覆盖区域 $\bar{\Omega}_1$ 的一个单位分解（参看第二章 § 1）. 那么定义在 $\bar{\Omega}_1$ 内的函数 $w=\Sigma_1^N\psi_jw_j$ 满足所要求的条件. 事实上，在 Σ_2 的邻域内有 $L(w)-f=O(y_m^\mu)$，因为在两个含 Σ_2 的点的区域 ω_j 的交集内，函数 w_j 仅仅差一个这样的函数，它连同其直到 μ 阶的导数在 Σ_2 上都为 0. 我们可以假设 ω_j 仅仅包含集合 Σ_2，$\Sigma_1\cup\Sigma_0$ 或 Σ_3 之一的点. 在 Ω_1 内考虑函数 $\tilde{f}=f-L(w)$. * 显然，$\tilde{f}$ 及其直到 $\mu-1$ 阶的导数在 Σ_2 上均为 0，并且属于 $C_{(\mu)}(\bar{\Omega}_1)$. 在区域 Ω_1 内考虑方程

$$L_\varepsilon(u)=\varepsilon\Delta u+a\Delta u+L(u)=f_1 \qquad (1.8.33)$$

其中，函数 $a\in C_{(\mu)}(\bar{\Omega}_1)$，在 Ω 内 $a=0$，在 $\bar{\Omega}_1\backslash\bar{\Omega}$ 内 $a>0$，

$\varepsilon = \text{const} > 0$，并且在边界包含 Σ_2 的那部分 $\Omega_1\backslash\Omega$ 内 $f_1 \equiv 0$，而在区域 Ω_1 的其余部分 $f_1 = \bar{f}$. 显然 $f_1 \in C_{(\mu)}(\Omega_1)$. 在区域 Ω_1 内，我们考虑在边界 S_1 上满足条件

$$u_\varepsilon|_{S_1} = 0 \tag{1.8.34}$$

的方程 (1.8.33) 的解 $u_\varepsilon(x)$. 由于在边界 S_1 的所有点都满足不等式

$$an_kn_k + a^{kj}n_kn_j > 0$$

因此根据定理和引理 1.8.2，1.8.4 的假设，可以断定解 u_ε 在 Ω_1 内有直到 μ 阶的导数，它们是关于 ε 一致有界的. 因此，当 $\varepsilon \to 0$ 时，函数 $u_\varepsilon(x) \to \tilde{u}(x)$，函数 $\tilde{u}(x) \in C_{(\mu)}(\Omega_1)$，$\tilde{u}(x)$ 在 Ω 内满足方程 $L(\tilde{u}) = f$，并且在 Σ_3 上 $\tilde{u} = 0$.

我们将证明：在 Σ_2 上 $\tilde{u} = 0$. 在 $\Omega_1\backslash\Omega$ 内的边界包含 Σ_2 的点的那些区域中函数 $\tilde{u}(x)$ 满足方程

$$a\Delta\tilde{u} + L(\tilde{u}) = 0$$

而且还在 S_1 上等于 0. 因为区域 Ω 的 Σ_2 点集是对区域 $\Omega_1\backslash\bar{\Omega}$ 的 Σ_1 型点集，所以根据唯一性定理 1.6.2，在这些区域内 $\tilde{u} = 0$，即在 Σ_2 上 $\tilde{u} = 0$. 从而 $u = \tilde{u} + w$ 是问题 (1.1.4)，(1.1.5) 的解，而且属于 $C_{(\mu)}(\bar{\Omega})$ 类. 定理证毕.

从下面引自[64]的例子表明，定理 1.8.2 中关于方程(1.1.4)的系数可以延拓到 Σ_2 的邻域内并且保持光滑性和二次型 $a^{kj}\xi_k\xi_j$ 的非负性的条件 2) 是本质的.

函数 $u = y^\gamma e^{\rho y}$ 在 y 轴的区间[0，1]上满足方程

$$yu_{yy} + (1-\gamma)u_y - (1+\gamma+\rho y)\rho u = 0 \tag{1.8.35}$$

其中 γ，ρ 是正的常数. 方程的系数无穷次可微，区域 $\Omega\{0 < y < 1\}$ 的边界点 $y = 0$ 属于 Σ_2，而另一边界点 $y = 1$ 属于 Σ_3. 显然，对于充分大的 ρ，(1.8.35)中 u 的系数为负的，并且其绝对值充分大. 但是，如果 $\gamma < \mu$，而且 γ 不是整数，则 u 只有不高于 $[\gamma]$ 阶的有界导数，其中 $[\gamma]$ 是 γ 的整数部分.

显然，方程(1.8.35)不可能延拓到点 $y = 0$ 的邻域而且保持二阶导数的系数的光滑性和非负性. 对于这个方程，不等式(1.7.1)

是不满足的.

下面的例子表明，定理 1.8.2 中的集合 $\bar{\Sigma}_2$，$\bar{\Sigma}_3$ 和 $\Sigma_1 \cup \Sigma_0$ 两两不相交的条件同样是本质的.

在 (x_1, x_2) 平面上，在圆 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 和 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ 之间围成的区域 Ω 内，考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + cu = 0, \quad c = \text{const} < 0 \qquad (1.8.36)$$

点$(-2, 0)$，$(-1, 0)$，$(1, 0)$和$(2, 0)$属于Σ_0，对于 $x_2 > 0$ 的圆弧 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 和对于 $x_2 < 0$ 的圆弧 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ 都属于 Σ_1，而边界的其余部分属于Σ_2. 在 Σ_2 上我们规定下面的函数:

$$u = 0, \text{ 对于 } x_2 < 0 \text{ (在 } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ 上)}$$
$$u = 1, \text{ 对于 } x_2 > 0 \text{ (在 } x_1^2 + x_2^2 = 4 \text{ 上)}$$

显然，这个问题的弱解当 $x_2 < 0$ 时沿直线 $x_1 = 1$ 和当 $x_2 > 0$ 时沿直线 $x_1 = -1$ 产生间断.

我们注意到，如果满足引理 1.8.1 的假设，并且区域 ω 的边界 σ 位于 Ω 内，$\sigma \cap E = \varnothing$，又若唯一性定理 1.6.2 的假设也成立，那么，(1.1.4)，(1.1.5)的弱解在 ω 内满足 Lipschitz 条件. 完全同样，如果 $\sigma \cap E = \varnothing$，并且对于 ω 的邻域满足引理 1.8.2 的假设，则从引理 1.8.2 可以推得问题(1.1.4)，(1.1.5)的弱解在 ω 中属于 $C_{(\mu)}$ 类.

如果 $c < -c_0 < 0$，其中常数 c_0 充分大并且依赖于 μ，那么定理 1.8.1 和 1.8.2 中关于在 $\det\|a^{kj}\| = 0$ 的点集的邻域内 $B_l < 0$ (对于 $l \leqslant \mu$) 的假设总是成立的. 下面的例子则说明了这个假设是必要的. 函数 $u = r^\alpha \left(\alpha > 0, \ \alpha - [\alpha] > 0, \ r^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2\right)$ 是方程为

$$L(u) = r^2 \Delta u - [\alpha m + \alpha(\alpha - 2)]u = 0$$

而且在 Σ_3 上 $u = 1$ 的问题(1.1.4)，(1.1.5)在区域 $\Omega\{r < 1\}$ 内的一个弱解. 这个例子表明，对于具有解析系数、解析函数 g 和任

意大常数 c_0 的方程 $L(u)=0$ 来说，它在边界 Σ 的邻域是椭圆型的，而且只可能有有限阶有界导数的弱解.

现在考察这样的问题：方程 $L(u)=f$ 和边界 Σ 在什么条件下，边界某段上的边界函数 g 才真的不影响(1.1.4),(1.1.5)的解在内点的光滑性?

对于引理 1.8.2，特别是，当方程 $L(u)=f$ 在边界的邻域内是椭圆型的而且 $c<-c_0<0$，在 $\det\|a^{kj}\|=0$ 的点上 c_0 充分大，能推得上面的结论是正确的.

引理 1.8.5 假设函数 $u_\varepsilon(x)$ 在区域 ω 内满足方程

$$\varepsilon\Delta u+L(u)=f$$

其中，ω 是边界上点 P 的某邻域与 Ω 的交集. 假设在局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$ 中，这个方程取形式

$$L_\varepsilon(u)=L'_\varepsilon(u)+cu=f \tag{1.8.37}$$

其中

$$L'_\varepsilon(u)\equiv\varepsilon\mu^{kj}u_{y_ky_j}+\varepsilon\nu^ku_{y_k}+\alpha^{kj}u_{y_ky_j}+\beta^ku_{y_k}$$

$$\mu^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^m\xi_k^2,\ \mu_0=\text{const}>0,\ \alpha^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant0$$

(假设边界 Σ 位于平面 $y_m=0$ 内，并且对于 Ω 内的点 $y_m>0$.) 假设 $u_\varepsilon(x)\in C^{(\mu+2)}(\bar\omega)$，在 ω 内 $|u_\varepsilon|\leqslant K_0$，其中 K_0 是常数，而且(1.8.37)的系数和函数 f 属于 $C_{(\mu)}(\omega)$ 类，$\mu\geqslant1$. 假设对于某正常数 K_j，下面条件之一成立:

1) 在 ω 的点上二次形式 $\alpha^{kj}\xi_k\xi_j$ 满足(17.1)，而且在 ω 内，对于某 $\kappa\geqslant2$ 或 $\kappa=0$ 和任意的 $\nu\leqslant\mu$，成者

$$-y_m\beta^m+[(4m^\nu-1)(\kappa+2\nu)+2]\alpha^{mm}\leqslant K_1y_m^2 \tag{1.8.38}$$

或者

$$\alpha^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant K_2\alpha^{mm}\sum_{j=1}^m\xi_j^2;$$

$$-y_m\beta^m\leqslant K_3(\alpha^{mm}+y_m^2) \tag{1.8.39}$$

2) 在 ω 的点上，形式 $y_m\alpha^{kj}\xi_k\xi_j$ 满足(1.7.1)，并且对于 $\kappa\geqslant2$

或 $\kappa = 0$ 和任意的 $\nu \leqslant \mu$, 或者

$$-y_m\beta^m + [(4m^\nu - 1)(\kappa + 2\nu) + 2]\alpha^{mm} + 2(\kappa + 2\nu)^{-1}M_1 y_m \leqslant K_4 y_m^2 \tag{1.8.40}$$

或者

$$\alpha^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant K_5\alpha^{mm}\sum_{j=1}^{m}\xi_j^2;$$

$$-y_m\beta^m + 2(\kappa + 2\nu)^{-1}M_1 y_m \leqslant K_6(\alpha^{mm} + y_m^2) \tag{1.8.41}$$

在 ω 内处处成立. 这里常数 M_1 由 (1.1.4) 的系数确定,

$$M_1 = M_0 + \gamma \max|\beta^m| \cdot m^\nu,$$

其中 M_0 依赖于 α^{kj} 及 $\beta^k (k \neq m)$, 而且 $\gamma = \text{const} > 1$.

假设 $p^l \equiv \sum_{\bar{S}_l}(D_{\bar{S}_l}u_\varepsilon)^2$, $\bar{S}_l = (s_1, \cdots, s_l)$, $s_i = 1, \cdots, m$,

$$D_{\bar{S}_l} = \frac{\partial}{\partial x_{s_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{s_l}}, \qquad V^\nu = \sum_{l=0}^{\nu} C_l y_m^{2l+\kappa} p^l.$$

那么在 ω 的点上,对于 $\nu \leqslant \mu$ 和与 ε 无关的某正常数 C_l, 函数 V^ν 满足不等式

$$\frac{1}{2}L'_\varepsilon(V^\nu) + (c + M_2)V^\nu + E_\nu V^{\nu-1} - a_0\sum_{l=1}^{\nu} C_l \sum_{\bar{S}_l} y_m^{2l+\kappa}(\alpha^{kj} + \varepsilon\mu^{kj})D_{\bar{S}_l}u_{y_k}D_{\bar{S}_l}u_{y_j} \geqslant -\tilde{E}_\nu \tag{1.8.42}$$

其中 a_0, E_ν 和 $\tilde{E}_\nu$ 是与 ε 无关的正常数, 而且 M_2 是由系数 b^k, a^{kj} 以及它们的一阶、二阶导数所确定.

证明 用归纳法证明不等式 (1.8.42). 首先对 $\nu = 1$ 证明 (1.8.42).

对 y_s 微分(1.8 37),并且乘以 u_{y_s}, 然后对 s 求和,我们就得到 $p^1 = \sum_1^m u_{y_k}^2$ 的方程

$$\frac{1}{2}L'_\varepsilon(p^1)+cp^1+[-\alpha^{kl}u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}+\alpha^{kl}_{y_s}u_{y_ky_l}u_{y_s}]$$

$$+\varepsilon[-\mu^{kl}u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}+\mu^{kl}_{y_s}u_{y_ky_l}u_{y_s}]+\beta^k_{y_s}u_{y_k}u_{y_s}$$

$$+c_{y_s}uu_{y_s}+\varepsilon\nu^k_{y_s}u_{y_k}u_{y_s}=f_{y_s}u_{y_s} \tag{1.8.43}$$

由于二次形式 $\mu^{kl}\xi_k\xi_l$ 是正定的，从而推得

$$|\mu^{kl}_{y_s}u_{y_ky_l}u_{y_s}|\leqslant\gamma_0\mu^{kl}u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}+R_1p^1,\quad \gamma_0=\text{const}<1$$

我们用 R_i 表示与 ε 无关的常数. 如果在 ω 内对于形式 $\alpha^{kl}\xi_k\xi_l$ (1.7.1) 成立，那么我们可以用完全同样的方法来估计形式为 $\alpha^{kl}_{y_s}u_{y_ky}u_{y_s}$ 的各个项.对于满足条件 2)的情况，关于形式 $y_m\alpha^{kl}\xi_k\xi_l$，不等式(1.7.1)成立。这就推得不等式

$$y_m|\alpha^{kl}_{y_s}u_{y_ky_l}|^2\leqslant M\alpha^{kl}u_{y_\rho y_k}u_{y_\rho y_l},\quad s\neq m$$

$$y_m^2|\alpha^{kl}_{y_m}u_{y_ky_l}|^2\leqslant R_2y_m\alpha^k u_{y_sy_k}u_{y_sy}+\gamma^2(\alpha^{kl}u_{y_ky_l})^2,$$

$$\gamma=\text{const}>1$$

考虑最后的不等式并利用 (1.8.37)，得到

$$|y_m^2\alpha^{kl}_{y_s}u_{y_ky_l}u_{y_s}|$$

$$\leqslant y_m\sum_{s=1}^{m}[R_3(y_m\alpha^{kl}u_{y_\rho y_k}u_{y_\rho y_l})^{1/2}+\gamma|\alpha^{kl}u_{y_ky_l}|]|u_{y_s}|$$

$$\leqslant\gamma_1y_m^2\alpha^{kl}u_{y_\rho y_k}u_{y_\rho y_l}+R_4y_mp^1$$

$$+\gamma_1y_m^2\varepsilon(\mu^{kl}u_{y_ky_l}+\nu^ku_{y_k})^2+R_5\varepsilon p^1+y_mR_6p^1+R_7$$

其中 $\gamma_1=\text{const}<1$，R_4 仅与 α^{kl} 有关，$R_6\leqslant\gamma m\cdot\max|\beta^m|+R_8$，而 R_8 依赖于 $\beta^k(k\neq m)$.

因此，用 $y_m^{2+\kappa}$ 乘以(1.8.43)，并且利用上面所得到的不等式(对于充分小的 γ_0 和 γ_1) 来估计方括号内的各项，我们得到下面关于 $q^1=y_m^{2+\kappa}+p^1$ 的关系式:

$$\frac{1}{2}L'_\varepsilon(q^1)+(c+M_2)q^1-a_1y_m^{2+\kappa}(\alpha^{kl}+\varepsilon\mu^{kl})u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}$$

$$-\frac{1}{2}(\kappa+2)(\beta^m+\varepsilon\nu^m)y_m^{\kappa+1}p^1$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha^{mm}+\varepsilon\mu^{mm})(\kappa+2)(\kappa+1)y_m^{\kappa}p^1$$

$$
\begin{aligned}
&-(\kappa+2)y_m^{\kappa+1}\alpha^{km}p_{y_k}^1-(\kappa+2)\varepsilon\mu^{km}y_m^{\kappa+1}p_{y_k}^1\\
&+y_m^{\kappa+1}(R_4+R_6)p^1+R_5\varepsilon y_m^{\kappa}p^1\\
\geqslant&-R_4
\end{aligned}
\tag{1.8.44}
$$

其中，如果引理的条件 1)满足，则 $R_4+R_6=0$；这里，常数 a_1 与 ε 无关，且 $0<a_1<1$。

从(1.7.9)容易看出

$$
\begin{aligned}
&y_m^{\kappa+1}(\kappa+2)|\alpha^{km}p_{y_k}^1|=2(\kappa+2)y_m^{\kappa+1}|\alpha^{km}u_{y_sy_k}u_{y_s}|\\
&\leqslant\gamma_3y_m^{\kappa+2}\alpha^{kl}u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}+\gamma_4\alpha^{mm}p^1y_m^{\kappa}
\end{aligned}
\tag{1.8.45}
$$

其中正常数 $\gamma_3<1$，$\gamma_4>2(\kappa+2)^2\cdot m$。

用同样的方法，得到

$$
\begin{aligned}
&(\kappa+2)y_m^{\kappa+1}\varepsilon|\mu^{km}u_{y_sy_k}u_{y_s}|\\
&\qquad\leqslant\gamma_3\varepsilon y_m^{\kappa+2}\mu^{kl}u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}+\varepsilon\gamma_4\mu^{mm}y_m^{\kappa}p^1
\end{aligned}
\tag{1.8.46}
$$

考虑到(1.8.45)，(1.8.46)，并且取 $\gamma_3<a_1$，由(1.8.44)得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_\varepsilon'(q^1)+(c+M_2)q^1\\
&-a_2y_m^{\kappa+2}(\varepsilon\mu^{kl}+\alpha^{kl})u_{y_sy_k}u_{y_sy_l}\\
&-y_m^{\kappa+1}\left[\frac{1}{2}(\beta^m+\varepsilon\nu^m)(\kappa+2)-R_4-R_6\right]p^1\\
&+\left[\left(\gamma_4-\frac{1}{2}(\kappa+2)(\kappa+1)\right)(\alpha^{mm}+\varepsilon\mu^{mm})\right.\\
&\left.+\varepsilon R_5\right]y_m^{\kappa}p^1\geqslant-R_{10}
\end{aligned}
\tag{1.8.47}
$$

其中，$a_2=\text{const}>0$。容易看出，对于 $q^0=y_m^{\kappa}u_\varepsilon^2(\kappa\geqslant2)$，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_\varepsilon'(q^0)-y_m^{\kappa}(\alpha^{kl}+\varepsilon\mu^{kl})u_{y_k}u_{y_l}+(c+M_2)q^0\\
&\qquad-2\kappa y_m^{\kappa-1}(\alpha^{km}+\varepsilon\mu^{km})uu_{y_k}\geqslant-R_{11}
\end{aligned}
$$

因为按照(1.7.9)，对于 $\kappa\geqslant2$，有

$$
\begin{aligned}
&|2y_m^{\kappa-1}(\alpha^{km}+\varepsilon\mu^{km})uu_{y_k}|\\
&\qquad\leqslant\gamma_5y_m^{\kappa}(\alpha^{mm}+\varepsilon\mu^{mm})(\alpha^{kl}+\varepsilon\mu^{kl})u_{y_k}u_{y_l}+R_{12}
\end{aligned}
$$

取常数 γ_5 充分小，得到

$$\frac{1}{2} L_\varepsilon'(q^0) - a_3 y_m^\kappa(\alpha^{kj} + \varepsilon\mu^{kj}) u_{y_k} u_{y_j}$$

$$+ (c + M_2) q^0 \geqslant -R_{13} \tag{1.8.48}$$

从(1.8 47)和(1.8.48)，我们推出一个关于 V^1 的不等式

$$\frac{1}{2} L_\varepsilon'(V^1) + (c + M_2) V^1 - a\{C_0 y_m^\kappa(\alpha^{kj} + \varepsilon\mu^{kj}) u_{y_k} u_{y_j}$$

$$+ y_m^{\kappa+2}(\varepsilon\mu^{kj} + \alpha^{kj}) u_{y_s y_k} u_{y_s y_j}\}$$

$$+ \varepsilon y_m^\kappa \left[R_5 + \left(\gamma_4 - \frac{1}{2}(\kappa+2)(\kappa+1)\right)\mu^{mm} \right] p^1$$

$$+ y_m^\kappa \left[-\frac{1}{2}(\kappa+2)(\beta^m + \varepsilon\nu^m) y_m \right.$$

$$+ \left(\gamma_4 - \frac{1}{2}(\kappa+2)(\kappa+1)\right)\alpha^{mm}$$

$$\left. + (R_4 + R_6) y_m \right] p^1 \geqslant -R_{14} \tag{1.8 49}$$

考虑到条件(1.8.38)，(1.8.39)和条件(1.8.40)，(1.8.41)，并且取常数 C_0 充分大，我们从(1.8.49)，得到

$$\frac{1}{2} L_\varepsilon'(V^1) + (c + M_2) V^1 - a_5[C_0 y_m^\kappa(\alpha^{kj} + \varepsilon\mu^{kj}) u_{y_k} u_{y_j}$$

$$+ y_m^{\kappa+2}(\varepsilon\mu^{kj} + \alpha^{kj}) u_{y_s y_k} u_{y_s y_j}] \geqslant -R_{15} \tag{1.8.50}$$

进一步假设对于某 $\nu < \mu (\nu \geqslant 1)$ (1.8.42)成立，完全象推导(1.8.50)那样，我们推得(1.8.42)对于 $\nu + 1$ 也成立。从而引理证毕。

注 2 假定用下面的假设来代替引理 1 8.5 的条件 1)和 2)：

3) 对于二次形式 $\alpha^{kj}\xi_k\xi_j$ 或 $y_m\alpha^{kj}\xi_k\xi_j$ 成立不等式 (1.7.1)，并且在 ω 内

$$\alpha^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant K_1\alpha^{mm}\sum_{j=1}^{m}\xi_j^2 \text{ 和 } \alpha^{mm} \geqslant K y_m^s \tag{1.8.51}$$

其中，s 是非负整数。那么对于函数

$$V^{\nu} = \sum_{l=0}^{\nu} C_l \gamma_m^{l(s+1)} p^l$$

成立形如(1.8.42)的不等式．这个论断的证明类似于引理 1.8.5 的证明．

定理 1.8.3 假设区域Ω的边界Σ由两个不相交的闭集Σ'和$\Sigma\backslash\Sigma'$组成（它们之间的任一个可以是空集）．假设对于充分小的δ，定理1.8.2中关于边界$\Sigma\backslash\Sigma'$、在区域$\Omega\backslash G'_\delta$内方程(1.1.4)的系数以及函数$f$和$g$的假设都成立（其中$G'_\delta$是集合$\Sigma'$的$\delta$邻域）；并且假设$G'_\delta$可以用有限个区域$\{\Omega_i\}$覆盖，使得在每个区域$\omega_i = \Omega'_i \cap \Omega$内，引理 1.8.5 关于系数$\alpha^{kj}$和$\beta^k$的假设成立．最后还假设函数$g$在$\Sigma'$上有界，$c_1 < -c_0 < 0$，而且常数$c_0$充分大并依赖于$\alpha^{kj}$及$\beta^k$．那么，对于任意的$\delta > 0$，问题(1.1.4)，(1.1.5)的广义解属于$C_{(\mu)}(\Omega\backslash G'_\delta)$，并且估计

$$\sum_{l=0}^{\mu} \rho^{2l+\kappa} \sum_{s_l} (D_{s_l} u)^2 < C_1 \tag{1.8.52}$$

成立，其中$C_1 = \text{const}$，ρ是点x到边界Σ'的距离，而$\kappa \geqslant 2$或$\kappa = 0$．

证明 假设Ω_0是这样的区域：$\Omega_0 \supset \Omega$，$\Omega_0 \supset (\Sigma\backslash\Sigma') \cap (\Sigma_2 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_0)$，区域$\Omega_0$的边界$S_0$包含$\Sigma_3 \cup \Sigma'$，并且$\Omega_0 \in A^{(\mu+2)}$．考虑方程

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon\Delta u + a(x)\Delta u + L(u) = f_1, \text{ 在 } \Omega_0 \text{ 内} \tag{1.8.53}$$

具有条件

$$u = g_n, \text{ 在 } S_0 \text{ 上} \tag{1.8.54}$$

的解$u_\varepsilon(x)$，其中在$S_0\backslash\Sigma'$上$g_n = 0$，在Σ'上g_n无穷次可微，当$n \to \infty$时，在$L_2(\Sigma')$中$g_n \to g$，而且g_n关于n一致有界；$a(x) \in C_{(\mu)}(\Omega_0)$，在$\Omega$内$a = 0$，而在$\bar{\Omega}_0\backslash\bar{\Omega}$内$a > 0$．完全象在证明定理 1.8.2 那样，由函数$f$构造出函数$f_1$．我们可以假设在$(\Sigma\backslash\Sigma') \cap \Sigma_2$的一个邻域外$f_1 = f$．

令区域$\Omega'_j (j = 1, \cdots, N)$和$\Omega''_j (j = N+1, \cdots, N_0)$覆盖$\bar{\Omega}_0$，而且函数$\{\psi_j\}$，$j = 1, \cdots, N_0$组成对应于$\Omega_0$的覆盖的单

位分解。我们可以假设区域 Ω_j'' 不包含 Σ' 的点。在每个区域 $\omega=\Omega_j'\cap\Omega$ 内考虑在引理 1.8.5 中所做的函数 V_j^ν、$\nu\leqslant\mu$，而在区域 $\Omega_j''\cap\Omega_0$ 内，令 $V_j^\nu=\sum_{l=0}^{\nu}C_lp^l$，其中 $p^l=\sum_{\bar{s}_l}(D_{\bar{s}_l}u_\varepsilon)^2$，$C_l$ 是将在下面选取的正常数。

考虑定义在 Ω_0 内的函数

$$W^\nu=\sum_{j=0}^{N_0}V_j^\nu\phi_j,\quad \nu\leqslant\mu$$

用证明引理 1.8.2 那样的方法，我们得到在区域 Ω_j'' 内，函数 V_j^ν 满足关系式

$$\frac{1}{2}L_\varepsilon'(V_j^\nu)+\frac{1}{2}a(x)\Delta V_j^\nu+(c+M_2)V_j^\nu+E_\nu V_j^{\nu-1}$$

$$-a_0\sum_{l=0}^{\nu}C_l\sum_{\bar{s}_l}(a^{ks}+\varepsilon\delta^{ks})D_{\bar{s}_l}u_{x_k}D_{\bar{s}_l}u_{x_s}$$

$$\geqslant-\tilde{E}_\nu \tag{1.8.55}$$

其中 M_2, E_ν, a_0, $\tilde{E}_\nu$, C_l 都是与 ε 无关的正常数，并且当 $k\neq s$ 时 $\delta^{ks}=0$，当 $k=s$ 时 $\delta^{ks}=1$。

用 $\phi_j(j=1,\cdots,N)$ 乘关系式(1.8.42)，而且对于 j 从 1 至 N 求和，再用 ϕ_j 乘(1.8.55)，并且对于 j 从 $N+1$ 至 N_0 求和，得到

$$\sum_{j=1}^{N_0}\frac{1}{2}[\phi_jL_\varepsilon'(V_j^\nu)+\phi_ja(x)\Delta V_j^\nu]+(c+M_2)W^\nu$$

$$+E_\nu W^{\nu-1}-\sum_{j=1}^{N_0}\tilde{a}\phi_j\Phi_j^\nu\geqslant-R_1 \tag{1.8.56}$$

其中，对于 $j=1,\cdots,N$，在 $\Omega_j'\cap\Omega_0$ 内，有

$$\Phi_j^\nu=\sum_{l=0}^{\nu}y_m^{2l+\varepsilon}C_l\sum_{\bar{s}_l}(a^{ks}+\varepsilon\mu^{ks})D_{\bar{s}_l}u_{y_k}D_{\bar{s}_l}u_{y_s}$$

而对于 $j=N+1,\cdots,N_0$，在 $\Omega_j''\cap\Omega_0$ 内

$$\Phi_i^\nu = \sum_{l=0}^{\nu} C_l \sum_{\bar{s}_l} (a^{ks} + \varepsilon\delta^{ks}) D_{\bar{s}_l} u_{x_k} D_{\bar{s}_l} u_{x_s}$$

用 R_s 表示与 ε 无关的常数．容易看出

$$\sum_{j=1}^{N_0} \psi_j L_\varepsilon'(V_j^\nu) = L_\varepsilon'(W^\nu) - \sum_{j=1}^{N_0} [L_\varepsilon'(\psi_j) V_j^\nu]$$

$$- 2\sum_{j=1}^{N} (\alpha^{ks} + \varepsilon\mu^{ks}) V_{jy_k}^\nu \psi_{jy_s}$$

$$- 2\sum_{j=N+1}^{N_0} (a^{ks} + \varepsilon\delta^{ks}) V_{jx_k}^\nu \psi_{jx_s} \qquad (1.8.57)$$

我们来估计(1.8.57)的后面二项．显然

$$|L_\varepsilon'(\psi_j) V_j^\nu| \leqslant R_2 W^\nu$$

因为对于 $k \neq m$ 和 $j = 1, \cdots, N$，所以有

$$V_{jy_k}^\nu = \sum_{l=0}^{\nu} C_l y_m^{2l+\kappa} p_{y_k}^l$$

$$= \sum_{l=0}^{\nu} 2C_l y_m^{2l+\kappa} D_{\bar{s}_l} u D_{\bar{s}_l} u_{y_k}$$

$$V_{jy_m}^\nu = \sum_{l=0}^{\nu} [2C_l y_m^{2l+\kappa} D_{\bar{s}_l} u D_{\bar{s}_l} u_{y_m}$$

$$+ C_l(2l+\kappa) y_m^{2l+\kappa-1} p^l]$$

对于 $1 \leqslant j \leqslant N$ 下面的不等式成立：

$$2|(\alpha^{ks} + \varepsilon\mu^{ks}) V_{jy_k}^\nu \psi_{jy_s}|$$

$$\leqslant \left| 2\sum_{l=0}^{\nu} C_l (\alpha^{mk} + \varepsilon\mu^{mk})(2l+\kappa) y_m^{2l+\kappa-1} p^l \psi_{jy_k} \right|$$

$$+ \sum_{l=0}^{\nu} \gamma y_m^{2l+\kappa} C_l (\alpha^{ks} + \varepsilon\mu^{ks}) D_{\bar{s}_l} u_{y_k} D_{\bar{s}_l} u_{y_s} \psi_j$$

$$+ \sum_{l=0}^{\nu} C_l \frac{1}{\gamma} (\alpha^{ks} + \varepsilon\mu^{ks}) \psi_{jy_k} \psi_{jy_s} \psi_j^{-1} y_m^{2l+\kappa} p^l \quad (1.8.58)$$

函数 ϕ_l 非负，因此根据(1.7.2)有 $|\phi_{ly_k}|^2 \leqslant R_3\phi_l$，$k=1,\cdots,m$. 由此推得(1.8.58)的最后一项不超过 R_4W^ν.

对于充分小的 γ，(1.8.58) 右端的第二项不超过 $\tilde{a}\phi_l\Phi_l^\nu$. 如果在区域 $\Omega_l'\cap\Omega_0$ 内，成立不等式 $\alpha^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant K_1\alpha^{mm}\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2$，则我们可以利用(1.7.10)来估计(1.8.58)右端的第一项. 因此我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\nu} C_l|\alpha^{mk}(2l+\kappa)y_m^{2l+\kappa-1}p^l\phi_{ly_k}| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{\nu} C_l\sqrt{2\alpha^{mm}}\sqrt{\alpha^{ks}\phi_{ly_k}\phi_{ly_s}}(2l+\kappa)y_m^{2l+\kappa-1}p^l \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{\nu} R_5C_l\sqrt{2\alpha^{mm}}\sqrt{\phi_l}(2l+\kappa)y_m^{2l+\kappa-1}p^l \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{\nu}\{C_l\gamma\alpha^{mm}y_m^{2(l-1)+\kappa}p^l\phi_l + R_6C_ly_m^{2l+\kappa}\varphi_lp^l\} \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{\nu} C_l\gamma\alpha^{mm}y_m^{2(l-1)+\kappa}\phi_lp^l + R_7W^\nu
\end{aligned} \tag{1.8.59}
$$

其中，φ_l 是在 Ω_l' 内有支集的函数，$0\leqslant\varphi_l\leqslant 1$，而且在 $\phi_l\neq 0$ 的点上 $\varphi_l=1$.

用同样的方法，我们得到

$$
\begin{aligned}
&|C_l\varepsilon\mu^{mk}(2l+\kappa)y_m^{2l+\kappa-1}p^l\phi_{ly_k}| \\
&\qquad\leqslant C_l\gamma\varepsilon\mu^{mm}y_m^{2(l-1)+\kappa}\phi_lp^l + \varepsilon R_8W^\nu
\end{aligned} \tag{1.8.60}
$$

如果在 $\Omega_l'\cap\Omega_0$ 内(1.8.38)或(1.8.40)成立，从而在 Σ' 上 $\alpha^{mm}=0$ 和 $\alpha^{mk}=0$，则我们利用关系式

$$
\begin{aligned}
&C_l|\alpha^{mk}(2l+\kappa)y_m^{2l+\kappa-1}p^l\phi_{ly_k}| \\
&\qquad\leqslant R_9C_ly_m^{2l+\kappa}\varphi_lp^l \leqslant R_{10}W^\nu
\end{aligned}
$$

来估计(1.5.58)右端的第一项. 对于(1.8.57)的最后一项，我们有估计

$$
|(a^{ks}+\varepsilon\delta^{ks})V^\nu_{lx_k}\phi_{lx_s}|
$$

$$\leqslant R_{11}\sum_{l=0}^{\nu}C_l(a^{ks}+\varepsilon\delta^{ks})\phi_{jx_k}\phi_{jx_s}p^l\phi_j^{-1}$$

$$+\gamma\sum_{l=0}^{\nu}C_l\sum_{\xi_l}(a^{ks}+\varepsilon\delta^{ks})D_{\xi_l}u_{x_k}D_{\xi_l}u_{x_s}\phi_j$$

$$\leqslant R_{12}W^{\nu}+\gamma\phi_j\Phi_j^{\nu}$$

把 (1.8.57) 右端给出的 $\sum_{j=1}^{N_0}\phi_jL'_\varepsilon(V_j^\nu)$ 的表达式代入 (1.8.56)，并考虑到上面推出的估计，我们得到

$$\frac{1}{2}[L'_\varepsilon(W^\nu)+a\Delta W^\nu]+(c+M_2)W^\nu$$

$$+R_{13}W^\nu+E_\nu W^{\nu-1}+(\gamma-\tilde{a})\sum_{j=1}^{N_0}\phi_j\Phi_j^\nu$$

$$+\gamma\varepsilon\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{\nu}C_ly_m^{2(l-1)+\kappa}\mu^{mm}\phi_jp^l$$

$$+\gamma\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{\nu}C_ly_m^{2(l-1)+\kappa}\alpha^{mm}\phi_jp^l$$

$$\geqslant -R_1 \tag{1.8.61}$$

(1.8.61) 左端的最后和式只对那些在 Ω'_j 内使得 (1.8.39) 或 (1.8.40)成立的 j 值进行．因此，取 γ 充分小，我们得到(1.8.61)左端最后三项的和是非正的．因此在 Ω_0 内对于 $W^\nu(\nu\leqslant\mu)$，有

$$\frac{1}{2}[L'_\varepsilon(W^\nu)+a\Delta W^\nu]+(c+M_2+R_{14})W^\nu$$

$$+E_\nu W^{\nu-1}\geqslant -R_1 \tag{1.8.62}$$

这里，R_{14} 依赖于 ν 和函数 a^{kj}。

从对于 (1.8.53) 的极大值原理推得 W^0 关于 ε 一致有界．此外，从 (1.8.62) 推得 W^ν 在 Ω_0 内关于 ε 及 n 一致有界，只要在 Ω_0 内 $W^{\nu-1}$ 关于 ε 和 n 一致有界，并且 $c+M_2+R_{14}<0$。事实上，如果 W^ν 在 Ω_0 内取到最大值，那么从(1.8.62)得到

$$W^\nu\leqslant-(c+M_2+R_{14})^{-1}(R_1+E_\nu W^{\nu-1})$$

显然，在Σ'上 $W^\nu = 0$. 在边界 S_0 的其余部分，满足条件

$$a^{kl}n_k n_l + a n_k n_l > 0$$

所以 (1.8.23) 成立. 因此，如果 W^ν 在 $S_0 \backslash \Sigma'$ 上取最大值，则从(1.8.23)推得 $W^\nu \leqslant R_{15}$. 于是，由归纳法，我们得到 $W^\nu(\nu \leqslant \mu)$ 关于 ε 和 n 的一致有界性. 由此，如同在定理 1.8.2 的证明那样，我们得到定理 1.8.3 的论断.

特别，容易看出定理 1.8.3 的假设将成立，如果 $\Sigma' \subset \Sigma_1$，并且系数 a^{kl} 或 Φa^{kl}（在 Σ_1 上 $\Phi = 0$，在 Ω 内 $\Phi > 0$，$\mathrm{grad}\,\Phi \neq 0$）可以这样延拓到 Σ_1 的邻域，使得 $a^{kl} \in C_{(2)}$，$a^{kl}\xi_k\xi_l \geqslant 0$，或者

$$\Phi a^{kl} \in C_{(2)}, \quad \Phi a^{kl}\xi_k\xi_l \geqslant 0.$$

注 3 用下面的条件代替引理 1.8.5 的条件 1) 和 2)，定理 1.8.3 仍然成立. 这个条件是：对于某区域 Ω'_s，只要仍然假设在 $s > 1$ 时这些区域 Ω'_s 覆盖 Σ' 的连通部分（记为 $\tilde{\Sigma}'$），则条件(1.8.51)成立. 在该情况下代替(1.8.52)，有

$$\sum_{l=1}^{\mu} \rho^{2l+\kappa} \cdot \rho_1^{2(s+1)} \sum_{\bar{s}_l} (D_{\bar{s}_l} u)^2 < C_1$$

其中 ρ_1 是点 x 到 $\tilde{\Sigma}'$ 的距离，而 ρ 是点 x 到 $\Sigma' \backslash \tilde{\Sigma}'$ 的距离.

注 4 容易看出，如果我们只假设 Σ' 的边界属于 Σ_3 来代替条件(1.8.39)或(1.8.41)，定理 1.8.3 就不成立. 事实上，假设 Ω 包含矩形 $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$，在这个矩形内 $L(u) \equiv \partial^2 u^2/\partial x_2 + cu = 0$，$c = \mathrm{const} < 0$. 直线 $x_2 = 0$ 上的线段 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ 和直线 $x_2 = 1$ 上的线段 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ 属于 Σ_3. 由唯一性定理，在矩形内广义解 $u(x)$ 是边界上给定函数 g 的线性组合，因此解在区域 Ω 内的光滑性依赖于边界函数 g 的光滑性. 这个论断对于在同一矩形上的 $L(u) \equiv \partial u/\partial x_1 + cu$，$c = \mathrm{const} < 0$ 也成立. 这表示直线 $x_2 = 0$ 上的线段 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ 属于 Σ_2.

注 5 在定理 1.8.3 中，假定边界 Σ' 包括一个 $(m-1)$ 维闭流形 $\tilde{\Sigma}'$，使得 $\tilde{\Sigma}' \subset \Sigma_0 \cup \Sigma_1$，并且存在这样的光滑曲面系列 $\tilde{\Sigma}^n$：使得 $\tilde{\Sigma}^n \subset \Omega$，以及由 $\tilde{\Sigma}^n \cup \tilde{\Sigma}'$ 围成的集合的测度当 $n \to \infty$ 时趋于

0 的意义下，当 $n\to\infty$ 时 $\tilde{\Sigma}^n\to\tilde{\Sigma}'$. 我们假设区域 Ω^n 的边界由 $(\Sigma\setminus\tilde{\Sigma}')\cup\tilde{\Sigma}^n$ 组成，$\tilde{\Sigma}^n$ 部分是 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 型的. 完全象定理 1.2.1（极大值原理）指出的那样，可以证明：如果 p^l 在 $\tilde{\Sigma}^n$ 上取到最大值，则 p^l 关于 n 一致有界，因此在定理 1.8.3 的假设下，问题 (1.1.4)，(1.1.5) 的弱解在 $\tilde{\Sigma}'$ 的邻域内也有 $\mu-3$ 阶有界导数.

我们注意到，引理 1.8.5 的条件 2）并没有假定系数 a^{kj} 可能延拓到 Σ' 的邻域，并且保持条件 $a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$ 和 $a^{kj}\in C_{(2)}$，特别是，它包括这种情况：在 Σ' 上 $\alpha^{mm}\equiv a^{kj}\Phi_{x_k}\Phi_{x_j}$ 与 Φ 同阶，其中方程 $\Phi=0$ 定义边界 Σ'，并且在 Σ' 上 $\operatorname{grad}\Phi\neq 0$. 这些条件也允许 $(\Sigma_1\cup\Sigma_0)\cap\Sigma_3$ 是非空的可能性.

现在我们在闭区域 $\Omega\cup\Sigma$ 内建立问题(1.1.4)，(1.1.5)弱解的光滑性定理. 我们将指出：在许多情况下，定理 1.8.2 的条件可以减弱.

引理 1.8.6 在边界 Σ 上点 P_1 的某邻域与 Ω 的交集 ω 内，假设函数 $u_\varepsilon(x)$ 满足

$$L_\varepsilon(u)=f,\quad u_\varepsilon=0,\ \text{在}\ \Sigma\ \text{上}$$

引用局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得对于该坐标，边界 Σ 位于平面 $y_m=0$ 内，而且在 ω 内 $y_m>0$，此时方程取形式

$$L_\varepsilon(u)\equiv L'_\varepsilon(u)+cu=f \tag{1.8.63}$$

其中

$$L'_\varepsilon(u)\equiv\varepsilon\mu^{kj}u_{y_ky_j}+\alpha^{kj}u_{y_ky_j}+\beta^k u_{y_k}$$

$$\mu^{mm}=1,\quad \mu^{mj}=0,\quad \alpha^{mj}=0,\quad j\neq m$$

$$\mu^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2,$$

$$\mu_0=\text{const}>0,\quad \alpha^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0$$

假设 $u_\varepsilon\in C^{(\mu+2)}(\bar{\omega})$，在 ω 内 $|u_\varepsilon|\leqslant K_0$，$K_0=\text{const}>0$，并且方程的系数和函数 f 属于 $C_{(\mu)}(\omega)$ 类. 假设对于某常数 $K_j>0$，下面的条件成立：

1）$\alpha^{mm}\leqslant K_1y_m$；$\beta^m=\text{const}>0$

$|D^l_{\bar{y}}\alpha^{mm}_{y_m}|\leqslant K_3y_m$，$1\leqslant l\leqslant\mu-1$

$$|D'_{\bar{S}_l}\alpha^{mm}| \leqslant K_2 y_m^2, \quad 2 \leqslant l \leqslant \mu \tag{1.8.64}$$

其中，$D'_{\bar{S}_l}v$ 表示 l 阶导数

$$\frac{\partial}{\partial y_{s_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial y_{s_l}}.$$

在这里，$\bar{S}_l = (s_1, \cdots, s_l)$，而且对于 $j = 1, \cdots, l$，$s_j \neq m$。

2）在 ω 内，形式 $\sum\limits_{k,j=1}^{m-1} \alpha^{kj}\xi_k\xi_j$ 满足（1.7.1），即

$$\left|\sum_{k,j=1}^{m-1} \alpha^{kj}_{y_s} v_{y_k y_j}\right|^2 \leqslant M \sum_{k,j=1}^{m-1} \alpha^{kj} v_{y_\rho y_k} v_{y_\rho y_j}$$

$$s = 1, \cdots, m; \quad M = \text{const} > 0 \tag{1.8.65}$$

3）或者函数 α^{mm}（在 ω 外延拓为 0）在 Σ 的邻域内有有界二阶导数，或者函数 $y_m\alpha^{mm}$（在 ω 外延拓为 0）在 Σ 的邻域内属于 $C_{(2)}$ 类，并且 $\beta^m = \beta_0$，其中 β_0 是依赖于 α^{mm} 的充分大的量（在第一种情况，可用在 Σ 上 $\beta^m = 0$ 的假定代替条件 $\beta^m = \text{const} > 0$）。

令

$$p^{\kappa,l} = \sum_{\bar{S}_l} y_m^{2\kappa}\left(\frac{\partial^\kappa}{\partial y_m^\kappa} D'_{\bar{S}_l} u_\varepsilon\right)^2, \quad \kappa \geqslant 0$$

$$Z^\nu = \sum_{l+\kappa \leqslant \nu} C_{\kappa,l} p^{\kappa,l};$$

$$Q_\varepsilon(v, w) = (\varepsilon\mu^{kj} + \alpha^{kj}) v_{y_k} w_{y_j} \tag{1.8.66}$$

其中 $C_{\kappa,l}$ 是某些常数。

那么，对于函数 $Z^\nu(\nu \leqslant \mu)$ 及对某些与 ε 无关的常数 $C_{\kappa,l}$，在 ω 内成立如下不等式

$$\frac{1}{2} L'_\varepsilon(Z^\nu) + (c + M_1)Z^\nu + E_\nu Z^{\nu-1}$$

$$- a_0 \sum_{l+\kappa \leqslant \nu} C_{\kappa,l} y_m^{2\kappa} Q_\varepsilon \cdot$$

$$\left(\frac{\partial^\kappa}{\partial y_m^\kappa} D'_{\bar{S}_l} u, \frac{\partial^\kappa}{\partial y_m^\kappa} D'_{\bar{S}_l} u\right) \geqslant -\widetilde{E}_\nu \tag{1.8.67}$$

其中 $a_0, M_1, E_\nu, \tilde{E}_\nu$ 都是与 ε 无关的正常数，而且 M_1 依赖于 β^k 和 α^{kl} 及其一、二阶导数。

证明 采用归纳法，我们用类似于证明引理 1.8.5 的方法来证明(1.8.67)。为此，我们先对 $\nu=1$ 证明 (1.8.67)。容易看出，对于

$$h_1 = y_m^2 u_{y_m}^2 + \sum_{\rho=1}^{m-1} u_{y_\rho}^2 = \sum_{\kappa+l=1} p^{\kappa,l}$$

有关系式

$$\frac{1}{2} L_\varepsilon'(h_1) - \sum_{\rho=1}^{m-1} Q_\varepsilon(u_{y_\rho}, u_{y_\rho}) - y_m^2 Q_\varepsilon(u_{y_m}, u_{y_m})$$

$$+ \sum_{\rho,k,l=1}^{m-1} (\varepsilon\mu_{y_\rho}^{kl} + \alpha_{y_\rho}^{kl}) u_{y_k y_l} u_{y_\rho}$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{m-1} \alpha_{y_\rho}^{mm} u_{y_m y_m} u_{y_\rho} + y_m^2 \alpha_{y_m}^{mm} u_{y_m y_m} u_{y_m}$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{m-1} y_m^2 (\varepsilon\mu_{y_m}^{kl} + \alpha_{y_m}^{kl}) u_{y_k y_l} u_{y_m} + c h_1$$

$$+ M_1 h_1 - \beta^m y_m u_{y_m}^2 - (\varepsilon + \alpha^{mm}) u_{y_m}^2$$

$$- 4(\varepsilon + \alpha^{mm}) y_m u_{y_m y_m} u_{y_m} \geqslant -R_1 \tag{1.8.68}$$

用 R_i 表示与 ε 无关的常数。我们来估计(1.8.68)的各项。显然

$$|2(\varepsilon + \alpha^{mm}) y_m u_{y_m y_m} \cdot u_{y_m}|$$

$$\leqslant \gamma(\varepsilon + \alpha^{mm}) y_m^2 (u_{y_m y_m})^2 + \frac{1}{\gamma}(\varepsilon + \alpha^{mm}) u_{y_m}^2$$

$$\leqslant \gamma y_m^2 Q_\varepsilon(u_{y_m}, u_{y_m}) + \frac{1}{\gamma}(\varepsilon + \alpha^{mm}) u_{y_m}^2$$

因为形式 $\mu^{kl}\xi_k\xi_l$ 是正定的而且满足条件 2)，所以可推得

$$\left| \sum_{k,l,\rho=1}^{m-1} (\varepsilon\mu_{y_\rho}^{kl} + \alpha_{y_\rho}^{kl}) u_{y_k y_l} \cdot u_{y_\rho} \right|$$

$$\leqslant \gamma \sum_{\rho=1}^{m-1}\left[\sum_{k,j=1}^{m-1}(\varepsilon\mu_{y_\rho}^{kj}+\alpha_{y_\rho}^{kj})u_{y_k y_j}\right]^2$$

$$+\frac{1}{\gamma}\sum_{\rho=1}^{m-1}u_{y_\rho}^2$$

$$\leqslant \gamma R_0\sum_{\rho=1}^{m-1}Q_\varepsilon(u_{y_\rho},u_{y_\rho})+R_2h_1$$

此外，根据(1.7.2)和条件 $|\alpha_{y_\rho y_\rho}^{mm}|\leqslant K_3y_m^2$，我们有

$$\left|\sum_{\rho=1}^{m-1}\alpha_{y_\rho}^{mm}u_{y_m y_m}u_{y_\rho}\right|$$

$$\leqslant \gamma\sum_{\rho=1}^{m-1}\max|\alpha_{y_\rho y_\rho}^{mm}|\cdot\alpha^{mm}u_{y_m y_m}^2+R_3h_1$$

$$\leqslant \gamma_1 y_m^2Q_\varepsilon(u_{y_m},u_{y_m})+R_3h_1$$

利用条件 2)，我们得到估计

$$y_m^2\left|\sum_{k,j=1}^{m-1}(\varepsilon\mu_{y_m}^{kj}+\alpha_{y_m}^{kj})u_{y_k y_j}u_{y_m}\right|$$

$$\leqslant \gamma y_m^2\sum_{\rho=1}^{m}Q_\varepsilon(u_{y_\rho},u_{y_\rho})+R_4h_1$$

如果满足条件 3) 的第一种假设，那么对于函数 α^{mm} 应用 (1.7.2) (α^{mm} 在 Σ 的邻域并且对于 $y_m<0$ 的部分内延拓为 0)，我们得



$$y_m^2\ \alpha_{y_m}^{mm}u_{y_m y_m}\cdot u_{y_m}|\leqslant \gamma y_m^2\alpha^{mm}(u_{y_m y_m})^2+R_5h_1$$
$$\leqslant \gamma y_m^2Q_\varepsilon(u_{y_m},u_{y_m})+R_5h_1$$

如果满足条件 3) 的第二种假设，那么在 ω 内可以应用(1.7.2)于函数 $y_m\alpha^{mm}$，有

$$|y_m|^3|\alpha_{y_m}^{mm}|^2\leqslant My_m^2\alpha^{mm}+M^0y_m|\alpha^{mm}|^2,\ M,M^0=\text{const}>0$$

因此，考虑到 $\alpha^{mm}\leqslant K_1y_m$，我们得到

$$|y_m^2\alpha_{y_m}^{mm}u_{y_m y_m}\cdot u_{y_m}|\leqslant \gamma y_m^3(\alpha_{y_m}^{mm}u_{y_m y_m})^2+\frac{1}{2\gamma}y_mu_{y_m}^2$$

$$\leqslant \gamma M y_m^2 \alpha^{mm}(u_{y_m y_m})^2 + \gamma M^0 y_m (\alpha^{mm})^2 (u_{y_m y_m})^2$$

$$+ \frac{1}{2\gamma} y_m (u_{y_m})^2$$

$$\leqslant \gamma_1 y_m^2 Q_\varepsilon(u_{y_m}, u_{y_m}) + R_6 y_m u_{y_m}^2$$

其中 R_6 是由函数 α^{mm} 确定的。

利用上面所得到的估计，选取充分小的常数 γ 和 γ_1，并且假设 $R_6 < \beta_0$，从(1.8.68)导出

$$\frac{1}{2} L'_\varepsilon(h_1) - a_0 \left[\sum_{\rho=1}^{m-1} Q_\varepsilon(u_{y_\rho}, u_{y_\rho}) + y_m^2 Q_\varepsilon(u_{y_m}, u_{y_m}) \right]$$

$$+ (c + M_2) h_1 + R_7(\varepsilon + \alpha^{mm}) u_{y_m}^2 \geqslant -R_8 \qquad (1.8.69)$$

因为 $h_0 = u_\varepsilon^2$，显然满足不等式

$$\frac{1}{2} L'_\varepsilon(h_0) + c h_0 - Q_\varepsilon(u, u) \geqslant -R_9 \qquad (1.8.70)$$

取常数 $C_{0,0}$ 充分大，从(1.8.69)和(1.8.70)得到关于 $Z^1 = h_1 + C_{0,0} h_0$ 的一个关系式

$$\frac{1}{2} L'_\varepsilon(Z^1) - a_1 \Big[C_{0,0} Q_\varepsilon(u, u) + y_m^2 Q_\varepsilon(u_{y_m}, u_{y_m})$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{m-1} Q_\varepsilon(u_{y_\rho}, u_{y_\rho}) \Big] + (c + M_2) Z^1 \geqslant -R_{10} \quad (1.8.71)$$

现在用归纳法证明(1.8.67)。计算 $\kappa + l = \nu$ 的 $\frac{1}{2} L'_\varepsilon(p^{\kappa,l})$ 表达式，可以类似于 $\nu = 1$ 所得的那样来进行估计，因此，假设(1.8.67)对于 $Z^{\nu-1}$ 成立，并且选取 $C_{\kappa,l}(\kappa + l \leqslant \nu - 1)$ 充分大，就推得关于 Z^ν 的不等式。用这种方法就得到引理 1.8.6 的论断。

定理 1.8.4 假设 Ω 的边界 Σ 由两个不相交的闭集 Σ' 和 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 所组成（其中任一个都可以是空集）。假设定理 1.8.2 中关于边界 $\Sigma\backslash\Sigma'$、在区域 $\Omega\backslash G'_\delta$ 内方程(1.1.4)的系数以及函数 f 和 g 的假设都成立。这里 G'_δ 是集合 Σ' 的 δ 邻域。我们还假设 G'_δ 可以用有限个区域 $\{\Omega'_j\}(j = 1, \cdots, N)$ 覆盖，使得在每个区域 $\omega_j = \Omega \cap \Omega'_j$ 内满足引理 1.8.6 中关于系数 α^{kj}，β^k，c 和函数 f 的假设，而且用条

件在 ω_l 内 $\beta^m > \text{const} > 0$ 来代替条件 $\beta^m = \text{const} > 0$. 最后假设在 Σ' 上 $g = 0$,并且 $c < -c_0 < 0$, 其中 c_0 充分大而且依赖于 α^{kl} 及 β^k. 那么,对于任意的 $\delta > 0$, (1.1.4), (1.1.5) 的弱解 $u(x)$ 属于 $C_{(\mu)}(\Omega\backslash G'_\delta)$ 类,并且在每个区域 ω_l 内对于 $u(x)$, 成立如下估计

$$\sum_{k+l\leqslant\mu} y_m^{2k}\left(\frac{\partial^k}{\partial y_m^k} D_{\bar{s}_l}u\right)^2 \leqslant C_1,\quad C_1 = \text{const} \tag{1.8.72}$$

其中 $y_1,\cdots,y_m$ 是使得 Σ' 位于平面 $y_m = 0$ 内的局部坐标.

证明 定理 1.8.4 完全可以象证明定理 1.8.3 那样来证明,不同之处仅仅是算子 (1.8.53) 在 Σ' 的邻域内的构造. 在区域 Ω_0 内(在证明定理 1.8.3 时所构造的区域),我们考虑方程

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon P(u) + a(x)\Delta u + \frac{1}{\tilde{\beta}_m} L(u) = \frac{f_1}{\tilde{\beta}_m} \tag{1.8.73}$$

在 S_0 上具有条件 $u = 0$, 其中 $P(u)$ 是 $\bar{\Omega}_0$ 内的椭圆算子,对于某 $\delta > 0$,在 $\Omega_0\backslash G'_\delta$ 内, $P(u) = \Delta u$,而在 Σ' 的某邻域内,算子 $P(u) = u_{y_my_m} + P_1(u)$,其中 $P_1(u)$ 是 Σ' 上给定的并且延拓到 Ω_0 内部的二阶椭圆型算子,其系数与 y_m 无关. 同样,在 Σ' 的 δ 邻域内,函数 $\tilde{\beta}^m = \beta^m$, 在 Σ' 的 2δ 邻域外 $\tilde{\beta}^m = 1$, 并且在 Σ' 上,如果有 $\beta^m > 0$, 那么就有 $\tilde{\beta}^m > \text{const} > 0$. 但是如果在 Σ' 上 $\beta^m = 0$, 那么 $\tilde{\beta}^m = 1$.

我们注意到,如果对于某个 s, 函数

$$\frac{a^{kl}F_{x_l}}{a^{sl}F_{x_l}},\quad k = 1,\cdots,m$$

属于 $C_{(\mu)}(\omega_l)$, 适当选取局部坐标,在 Σ' 的邻域内对于算子 L', 引理 1.8.5 中条件 $\alpha^{mj} = 0\ (j \neq m)$ 总是满足的. 这里 a^{kl} 是算子 $L(u)$ 的系数, $F = 0$ 是边界 Σ' 的方程,而且 $\text{grad}\, F \neq 0$.

定理 1.8.5 假设满足定理 1.8.4 的全部条件,而且假设在每个区域 ω_l 内下面条件在 Σ' 的邻域内总有一个成立:或者

$$|D'_{s_l}\alpha^{mm}| \leqslant K_3 y_m^2,\quad 0 \leqslant l \leqslant \mu$$
$$|D'_{s_l}\alpha^{mm}_{y_m}| \leqslant K_4 y_m, 0 \leqslant l \leqslant \mu - 1;$$
$$\beta^m > \text{const} > 0 \tag{1.8.74}$$

或者

$$\alpha_{y_m}^{mm} \neq 0, \quad \frac{\beta^m}{\max |\alpha_{y_m}^{mm}|} > 1 \tag{1.8.75}$$

其中，K_3 和 K_4 是某正常数．那么，如果条件(1.8.75)成立，则对每个 $\delta > 0$，(1.1.4)，(1.1.5)的弱解属于 $C_{(\mu-1)}(\Omega)$ 类和 $C_{(\mu)}(\Omega \backslash G'_\delta)$ 类，而如果条件(1.8.74)成立，则对于每个 $\delta > 0$，$k = [\mu/2]$，弱解属于 $C_{(k)}(\Omega)$ 和 $C_{(\mu)}(\Omega \backslash G'_\delta)$ 类．

证明 我们首先假设在 ω_l 内，条件(1.8.74)成立．那么，应用(1.8.73)的解 u_ε（设在边界 S_0 上等于 0）的估计(1.8.72)（其中常数 C_1 与 ε 无关），并且在(1.8.73)中令 $\varepsilon \to 0$ 取极限，在 ω_l 的内点上，我们得到

$$\alpha^{mm} u_{y_m y_m} + \beta^m u_{y_m} = F_1 \tag{1.8.76}$$

根据(1.8.72)，式中的 F_1 是 ω_l 内的有界函数．因为在 ω_l 内 $\alpha^{mm} \leqslant K_3 y_m^2$，从(1.8.72)同样得到 $\alpha^{mm} u_{y_m y_m}$ 在 ω_l 内是有界的．从(1.8.76)推得 u_{y_m} 在 ω_l 内有界．

此外，把算子 $D'_{s_l}(l \leqslant \mu-2)$ 作用于(1.8.76)的两端，得到方程

$$\alpha^{mm} D'_{s_l} u_{y_m y_m} + \beta^m D'_{s_l} u_{y_m} = F_2$$

其中 F_2 包含 u 关于 $y_1, \cdots, y_{m-1}$ 的导数，以及形如 $D_{s_{l-\gamma}} \alpha^{mm} \cdot D'_{s_\gamma} u_{y_m y_m}(l-\gamma > 0, l \leqslant \mu-2)$ 的项．因为由假设 $|D'_{s_l} \alpha^{mm}| \leqslant K_3 y_m^2$，根据(1.8.72)，函数 F_2 在 ω_l 内有界，所以对于 $l \leqslant \mu-2$，$D'_{s_l} u_{y_m}$ 在 ω_l 内有界．

依次把算子 $D'_{s_l} \partial^\nu / \partial y_m^\nu (\nu = 1, \cdots, \mu-2, l+\nu \leqslant \mu-2)$ 作用于(1.8.76)，并且用 y_m^ν 乘所得到的方程，我们得到一些方程，由这些方程和(1.8.74)，(1.8.72)推得对于 $l+\nu \leqslant \mu-2$

$$y_m^\nu D'_{s_l} \frac{\partial^{\nu+1} u}{\partial y_m^{\nu+1}}$$

在 ω_l 内有界．

对于 κ 用归纳法来证明所有直到 $[\mu/2]$ 阶导数在 ω_l 内的有界性．我们假设对于某 $\kappa \geqslant 1$ 在 ω_l 内成立估计

$$\left| y_m^\nu D'_{s_l} \frac{\partial^{\nu+\kappa} u}{\partial y_m^{\nu+\kappa}} \right| < C_2 = \text{const},$$

$$l + \nu \leqslant \mu - 2\kappa \tag{1.8.77}$$

然后证明对于 $\kappa+1$ 成立同样的估计. 为此,把算子 $\dfrac{D'_{s_l}\partial^{\nu+\kappa}}{\partial y_m^{\nu+\kappa}}$ $(l+\nu \leqslant \mu - 2(\kappa+1))$ 作用于方程(1.8.76)并且乘以 y_m^ν.

所得方程与条件(1.8.74)及归纳法假设(1.8.77)一起就得出:形如(1.8.77)的估计对于 $\kappa+1$ 也成立.

由(1.8.72)和对于 $\nu=0$, $\kappa \leqslant [\mu/2]$ 所证的估计(1.8.77),推得 $u(x) \in C_{(\mu-1)}(\omega_l)$. 因此在条件(1.8.74)下,定理证毕.

如果在 Σ' 上 $\alpha_{y_m}^{mm} \neq 0$, 那么在 ω_l 内(1.8.76)可以写为形式

$$y_m u_{y_m y_m} + q(y_1, \cdots, y_m) u_{y_m} = \Psi \tag{1.8.78}$$

其中函数 Ψ 在 ω_l 内有界,而且 $q > q_0 = \text{const} > 0$. 在 ω_l 内我们固定一点 $P^0 = (y_1^0, \cdots, y_m^0)$, $y_m^0 > 0$, 并且考虑线段 $\{0 < y_m \leqslant y_m^0,\ y_1 = y_1^0, \cdots, y_{m-1} = y_{m-1}^0\}$. 用

$$y_m^{-1} \exp\left[\int_{y_m^0}^{y_m} q(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, s) s^{-1} ds\right]$$

乘(1.8.78),并且把它对于 y_m 从 $y_m = \rho$ 到 $y_m = y_m^0$ 积分 $(0 < \rho < y_m^0)$, 我们得到

$$\begin{aligned} |u_{y_m}(P^0)| \leqslant{}& \exp\left[\int_{y_m^0}^{\rho} q(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, s) s^{-1} ds\right] \\ &\cdot |u_{y_m}(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, \rho)| + \max_{\omega_l} |\Psi| \\ &\cdot \int_\rho^{y_m^0} z^{-1} \exp\left[\int_{y_m^0}^{z} q(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, s) s^{-1} ds\right] dz \end{aligned} \tag{1.8.79}$$

容易看出,

$$\begin{aligned} &\exp\left[\int_{y_m^0}^{\rho} q(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, s) s^{-1} ds\right] \\ &\qquad \leqslant \exp\left[\int_{y_m^0}^{\rho} q_0 s^{-1} ds\right] = \rho^{q_0} (y_m^0)^{-q_0}, \\ &\int_\rho^{y_m^0} z^{-1} \exp\left[\int_{y_m^0}^{z} q(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, s) s^{-1} ds\right] dz \\ &\qquad \leqslant \int_\rho^{y_m^0} z^{q_0 - 1} (y_m^0)^{-q_0} dz \end{aligned}$$

$$= q_0^{-1}(1 - \rho^{q_0}(y_m^0)^{-q_0})$$

从(1.8.79)得到

$$|u_{y_m}(P^0)| \leqslant (y_m^0)^{-q_0}\rho^{q_0}|u_{y_m}(y_1^0, \cdots, y_{m-1}^0, \rho)| + \max|\Psi| q_0^{-1}(1 - (y_m^0)^{-q_0}\rho^{q_0}) \qquad (1.8.80)$$

因为,根据条件(1.8.75), $q_0 > 1$, 当我们在(1.8.80)中令 ρ 趋于 0, 并且考虑到(1.8.72)时,我们得到

$$|u_{y_m}(P^0)| \leqslant \max|\Psi| q_0^{-1} \qquad (1.8.81)$$

此外,连续地把算子 $D'_{s_l}(l = 1, \cdots, \mu - 2)$ 作用于(1.8.78),我们得到 $D'_{s_l}u_{y_m}$ 的方程,由此,完全象已经得到的估计(1.8.81)一样,我们连续地对 $l = 1, \cdots, \mu - 2$ 得到 $|D'_{s_l}u_{y_m}|$ 在 ω_l 内的有界性.

我们假设对于某 $\kappa > 1$ 已经证明形式为 $D'_{s_l}\dfrac{\partial^\kappa u}{\partial y_m^\kappa}$ $(l + \kappa \leqslant \mu - 1)$ 的导数在 ω_l 内的有界性,我们证明,由此可以推得对于 $\nu = \kappa + 1$, $l + \kappa + 1 \leqslant \mu - 1$ 的导数 $D'_{s_l}\partial^\nu u/\partial y_m^\nu$ 的有界性. 为此,我们先将算子 $\partial^\kappa/\partial y_m^\kappa$ 作用于方程(1.8.78),得到关于 $v = \partial^{\kappa+1}u/\partial y_m^{\kappa+1}$ 的方程

$$y_m(v)_{y_m} + (q + \kappa)v = \Psi_\kappa \qquad (1.8.82)$$

其中 Ψ_κ 是有界函数. 从这个方程,完全象已得的估计(1.8.81)那样,得到 $\partial^{\kappa+1}u/\partial y_m^{\kappa+1}$ 在 ω_l 内的有界性. 然后,连续地将 $l = 1, \cdots, \mu - \kappa - 2$ 的算子 D'_{s_l} 作用于(1.8.82),我们得到形式为 $D'_{s_l}\partial^{\kappa+1}u/\partial y_m^{\kappa+1}(l + \kappa \leqslant \mu - 2)$ 的导数的有界性. 因此定理证毕.

注 6 定理 1.8.5 给出一些条件,在这些条件下,问题(1.1.4),(1.1.5)的弱解存在,它在 Σ_1 的邻域内光滑. 在这过程中,并没有象定理 1.8.2 中所做的那样,假设(1.1.4)可以延拓到 Σ_1 的邻域内,并且保持其系数的光滑性和二次形式 $a^{kl}\xi_k\xi_l$ 的非负性. 在 Kohn 和 Nirenberg 的论文[64]中得到过一个类似的定理. 但是,在该论文中,与上面想法不同之处在于,用椭圆型方程的解,令 $\varepsilon \to 0$ 取极限而得到问题(1.1.4),(1.1.5)的光滑解的过程是这样来进行的:

在 Σ_1 的邻域内补加一个带小参数 ε 的高阶椭圆型算子到(1.1.4)，算子的阶数依赖于问题的数据的光滑度（数 μ）．而且在 Σ_1 的邻域外他们还补加一个仍带小参数 ε 的二阶椭圆算子．论文[64]的结果将在下节考察．

引理 1.8.7 设引理 1.8.6 的假设除了条件 1) 用如下关系式代替外都成立，这关系式是：在 ω_l 内对于某些常数 K_l 和 $s \geqslant 1$：

$$a^{mm} \geqslant K_0 y_m^s \tag{1.8.83}$$

$$a^{mm} \leqslant K_1 y_m, \quad |D'_{s_l} a^{mm}| \leqslant K_2 y_m^{s+1}, \quad 2 \leqslant l \leqslant \mu,$$

$$|D'_{s_l} a^{mm}_{y_m}| \leqslant K_3 y_m^{\frac{s+1}{2}}, \quad 1 \leqslant l \leqslant \mu - 1,$$

$$\beta^m = \text{const}$$

令

$$p^{\kappa,l} = y_m^{\kappa(s+1)} \sum_{s_l} \left(\frac{\partial^\kappa}{\partial y_m^\kappa} D'_{s_l} u_\varepsilon \right)^2$$

并且象前面那样，令 $Z^\nu = \Sigma_{l+\kappa \leqslant \nu} C_{\kappa,l} p^{\kappa,l}$．则在 ω_l 的点上，对于 $Z^\nu (\nu \leqslant \mu)$ 有下面不等式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} L'_\varepsilon (Z^\nu) + (c + M_1) Z^\nu + E_\nu Z^{\nu-1} \\ &\qquad - a_0 \sum_{l+\kappa \leqslant \nu} C_{\kappa,l} y_m^{\kappa(s+1)} Q_\varepsilon \left(\frac{\partial^\kappa}{\partial y_m^\kappa} D'_{s_l} u, \ \frac{\partial^\kappa}{\partial y_m^\kappa} D'_{s_l} u \right) \\ &\qquad \geqslant -\widetilde{E}_\nu \end{aligned} \tag{1.8.84}$$

其中 $C_{\kappa,l}$，a_0，M_1，E_ν，$\widetilde{E}_\nu$ 都是与 ε 无关的常数，而且 M_1 依赖于 β^k，α^{kj} 及其一阶、二阶导数．

证明 不等式 (1.8.84) 可以完全类似于不等式 (1.8.67) 来证明．首先我们对于 $\nu = 1$ 证(1.8.84)．假设

$$h_1 = y_m^{s+1} u_{y_m}^2 + \sum_{p=1}^{m-1} u_{y_p}^2.$$

我们有

$$\frac{1}{2} L'_\varepsilon (h_1) + c h_1 + M_1 h_1$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\rho=1}^{m-1} Q_\varepsilon(u_{y_\rho}, u_{y_\rho}) - y_m^{s+1}Q_\varepsilon(u_{y_m}, u_{y_m})\\
&+\Big[\sum_{k,l,\rho=1}^{m-1}(\varepsilon\mu_{y_\rho}^{kl}+\alpha_{y_\rho}^{kl})u_{y_ky_l}u_{y_\rho}\\
&+\sum_{\rho=1}^{m-1}\alpha_{y_\rho}^{mm}u_{y_my_m}u_{y_\rho}\Big]+y_m^{s+1}\Big[\alpha_{y_m}^{mm}u_{y_my_m}u_{y_m}\\
&+\sum_{k,l=1}^{m-1}(\varepsilon\mu_{y_m}^{kl}+\alpha_{y_m}^{kl})u_{y_ky_l}u_{y_m}\Big]\\
&-\frac{(s+1)}{2}\beta^m y_m^s u_{y_m}^2\\
&-(\varepsilon+\alpha^{mm})y_m^{s-1}\frac{s(s+1)}{2}u_{y_m}^2\\
&-2(\varepsilon+\alpha^{mm})(s+1)y_m^s u_{y_my_m}u_{y_m}\geqslant -R_1
\end{aligned}
$$

最后一项及方括号中各项完全可以象在证明引理 1.8.6 那样来进行估计.考虑到在(1.8.70)中(对于 $h^0=u_\varepsilon^2$),我们有形如$-Q_\varepsilon(u,u)$的项,因此我们可以估计 $-\frac{s+1}{2}\beta^m y_m^s u_{y_m}^2+R_2y_m^su_{y_m}^2$ 的项. 因为 $\alpha^{mm}\geqslant K_0y_m^s$, 推得在 $h_1+C_{0,0}h^0$ 的方程中,对于充分大的 $C_{0,0}$,和式

$$
-\frac{s+1}{2}\beta^m y_m^s u_{y_m}^2+R_1y_m^su_{y_m}^2-C_{0,0}\alpha^{mm}u_{y_m}^2
$$

是非正的. 引理 1.8.7 的证明的剩下部分只是重复引理 1.8.6 的证明.

定理 1.8.6 假设边界 Σ 由两个不相交的闭集 Σ' 和 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 组成(它们中的任一个可以是空集). 假设定理 1.8.2 中关于边界 $\Sigma\backslash\Sigma'$、在区域 $\Omega\backslash G'_\delta$ 内关于方程(1.1.4)的系数、函数 f 和 g 的假设都成立,其中 G'_δ 是 Σ' 的 δ 邻域. 我们还假设 G'_δ 可以用有限个区域 $\Omega'_j(j=1,\cdots,N)$ 覆盖,使得在每个区域 $\omega_j=\Omega\cap\Omega'_j$ 内,关于系数 α^{kj}, β^k, c 和函数 f, 或者满足引理 1.8.6 的假设或者满足引

理 1.8.7 的假设．假设在 Σ' 上 $g=0$，在 G'_δ 内 $c<-c_0<0$，这里常数 c_0 充分大并且依赖于 α^{kj}，β^k 及其一阶、二阶导数．则对于任意的 $\delta>0$，(1.1.4)，(1.1.5)的弱解 $u(x)$ 属于 $C_{(\mu)}(\Omega\setminus G'_\delta)$ 类．此外，在每个区域 ω_l 内对于 $u(x)$，成立如下的估计：

$$\sum_{k+l\leqslant\mu} y_m^\nu\left(\frac{\partial^k}{\partial y_m^k}D'_{s_l}u\right)^2\leqslant C_1=\text{const} \tag{1.8.85}$$

其中 $y_1,\cdots,y_m$ 是使得 Σ' 位于平面 $y_m=0$ 内的局部坐标，在 Ω 内 $y_m>0$．如果点 $(y_1,\cdots,y_m)$ 属于 ω_l，对于它，满足引理 1.8.6 的假设，则式中的 $\nu=2k$；如果在 ω_l 内满足引理 1.8.7 的假设，那么式中的 $\nu=k(s+1)$．

这个定理的证明完全象证明定理 1.8.4 那样来进行．

定理 1.8.7 设满足定理 1.8.6 的假设，而且 $\Sigma'=\Sigma_1'\cup\Sigma_2'$，其中对于边界含 Σ_1' 的点的那些区域 ω_l 满足定理 1.8.5 的假设(1.8.75)，而边界含 Σ_2' 的点的那些 ω_l 满足引理 1.8.7 的假设以及条件

$$\beta^m+(\nu-1)\alpha^{mm}_{y_m}<0,\ \nu\leqslant\mu \tag{1.8.86}$$

那么，对于任意的 $\delta>0$，(1.1.4)，(1.1.5)的弱解属于 $C_{(\mu-1)}(\Omega)$ 类和 $C_{(\mu)}(\Omega\setminus G'_\delta)$ 类．

证明 鉴于定理 1.8.5，只要证明在 Σ_2' 的邻域内解 $u(x)$ 属于 $C_{(\mu-1)}$ 类就够了．显然 $\Sigma_2'\subset\Sigma_2$．我们首先指出在 ω_l 内 $u_{\varepsilon y_m}$ 一致有界，其中 u_ε 是类似于(1.8.73)的方程的解，它在边界 S_0 上等于 0，同时在 Σ_2' 的 δ 邻域内 $\bar\beta^m=|\beta^m|$．对定理 1.8.6 的证明，在 Σ_2' 的邻域内我们得到 u_ε 的估计

$$\sum_{k+l\leqslant\mu} y_m^{k(s+1)}\left(\frac{\partial^k}{\partial y_m^k}D'_{s_l}u_\varepsilon\right)^2\leqslant C_1 \tag{1.8.87}$$

其中常数 C_1 与 ε 无关．根据方程(1.8.73)并考虑到(1.8.87)，我们得到

$$(\alpha^{mm}+\varepsilon|\beta^m|)u_{\varepsilon y_m y_m}+\beta^m u_{\varepsilon y_m}=\Psi_\varepsilon \tag{1.8.88}$$

其中函数 Ψ_ε 关于 ε 一致有界．根据估计(1.8.87)，对于 $y_m\geqslant\delta_1>0$，$u_{\varepsilon y_m}$ 关于 ε 一致有界．

对于 $0\leqslant y_m\leqslant\delta_1$ 考虑 $u_{\varepsilon y_m}$，如果在 $0\leqslant y_m<\delta_1$ 上 $u_{\varepsilon y_m}$ 取到最大正值或者最小负值，那么在这个点上 $u_{\varepsilon y_m}u_{\varepsilon y_m y_m}\leqslant 0$，而且由于 $\beta^m\leqslant 0$，从(1.8.88)推得

$$|u_{\varepsilon y_m}|\leqslant \max|\Psi_\varepsilon|\cdot|\beta^m|^{-1}$$

即函数 $p^1=\sum_{j=1}^{m}u_{\varepsilon x_j}^2$ 关于 ε 一致有界。

此外，考虑到 p^1 在 Σ_2^1 的邻域内关于 ε 一致有界，而且对于 $y_m\geqslant\delta$，所有直到 μ 阶的导数关于 ε 一致有界，我们完全可以象引理 1.8.7 那样来证明和式

$$\sum_{1\leqslant l+\nu+1\leqslant\mu}C_{\nu+1,l}y_m^{\nu(s+1)}\left(\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial y_m^{\nu+1}}D'_{s_l}u_\varepsilon\right)^2$$

在 Σ_2^1 的邻域内关于 ε 一致有界。

在 Σ_2^1 的邻域内所有直到 $\mu-1$ 阶导数的有界性的证明可以对 κ 归纳进行。假设对于某 $\kappa\geqslant 1$ 估计

$$\sum_{1\leqslant l+\nu+\kappa\leqslant\mu}C_{\nu+\kappa,l}y_m^{\nu(s+1)}\left(\frac{\partial^{\nu+\kappa}}{\partial y_m^{\nu+\kappa}}D'_{s_l}u_\varepsilon\right)^2<C_2 \qquad (1.8.89)$$

成立，其中常数 C_2 与 ε 无关。我们证明对于 u_ε 的所有 $\kappa+1$ 阶导数在 ω_l 内关于 ε 一致有界。完全象证明引理 1.8.7 那样，由此我们得到：形如 (1.8.89) 的估计对于 $\kappa+1$ 也成立。为此将算子 $\partial^\kappa/\partial y_m^\kappa$ 作用于方程(1.8.88)，在 ω_l 内有

$$\begin{aligned}&(\alpha^{mm}+\varepsilon|\beta^m|)\left(\frac{\partial^{\kappa+1}u_\varepsilon}{\partial y_m^{\kappa+1}}\right)_{y_m}\\&+(\beta^m+\kappa\alpha_{y_m}^{mm}+\kappa\varepsilon|\beta^m|_{y_m})\frac{\partial^{\kappa+1}u_\varepsilon}{\partial y_m^{\kappa+1}}=\Psi_\varepsilon^\kappa \qquad (1.8.90)\end{aligned}$$

其中，根据 (1.8.89)，函数 Ψ_ε^κ 关于 ε 一致有界。因为由定理 1.8.7 的假设，我们有 $\beta^m+\kappa\alpha_{y_m}^{mm}<0$，完全跟证明 $u_{\varepsilon y_m}$ 的有界性的方法一样，从(1.8.90)得出函数 $\dfrac{\partial^{\kappa+1}u_\varepsilon}{\partial y_m^{\kappa+1}}$ 在 Σ_2^1 的邻域内关于 ε 是一致有界的。

由此和 (1.8.89) 式，推得 u_ε 的所有 $\kappa+1$ 阶导数是一致有界

的，这就推出形为(1.8.89)的估计对于$\kappa+1$也成立.

于是，我们得到在Σ_2^1的邻域内u_ε的所有$\mu-1$阶导数关于ε的一致有界性. 定理证毕.

定理 1.8.7 的条件(1.8.83)可以省略. 即下面的结论成立:

定理 1.8.8 设定理 1.8.7 的所有假设除了(1.8.83)外都成立(在定理 1.8.7 中，假设在Σ_2^1的邻域内的点上满足(1.8.83)). 则在$\Omega\backslash G'_\delta$内(1.1.4),(1.1.5)的广义解属于$C_{(\mu)}$类，在$\Sigma_1$的邻域内属于$C_{(\mu-1)}$类，而在$\Sigma_2^1$的邻域内属于$C_{(\mu-3)}$类.

证明 在区域Ω_0(在证明定理 1.8.3 和 1.8.4 时所定义的区域)内，考虑方程

$$\varepsilon\tilde{L}(u)+a(\kappa)\Delta u+L(u)=f_1 \tag{1.8.91}$$

其中，$\tilde{L}$在$\bar{\Omega}_0\backslash\Sigma_2^1$内处处是椭圆型的，在$\Sigma_2^1$的$\delta$邻域外$\tilde{L}(u)\equiv P(u)$(算子$P$是在定理 1.8.4 的证明中已被定义了的)，而且在Σ_2^1的$\delta/2$邻域内

$$\tilde{L}(u)\equiv\tilde{a}(y_m)u_{y_my_m}+P_1(u)$$

其中，$P_1(u)$是给定在Σ_2^1上的椭圆算子，并且延拓到Ω内，而系数与y_m无关；对于$y_m\leqslant\delta/4$，$\tilde{a}(y_m)=y_m^2$，对于$\delta/3\leqslant y_m\leqslant\delta/2$，$\tilde{a}(y_m)=1$，对于$0<y_m\leqslant\delta/2$，$0<\tilde{a}\leqslant1$. 依照定理 1.8.7，在区域$\Omega_0$内方程(1.8.91)有一个解，它在边界$S_0$上等于0. 这个解属于$C_{(\mu-1)}(\Omega_0)$类. 在边界$\Sigma_2^1$上，我们可以用方程(1.8.91)和对它关于$y_1,\cdots,y_m$微分所得的方程来表示$u_\varepsilon$的直到$\mu-1$阶的导数. 容易看出，这些导数关于$\varepsilon$一致有界. 除这以外，定理 1.8.8 的证明按定理 1.8.4 的证明程序来进行，所不同的是：只在边界含Σ_2^1的点的那些区域ω_i内，我们令

$$Z^\nu=\Sigma_{l\leqslant\nu}C_l\Sigma_{\xi_l}(D_{\xi_l}u_\varepsilon)^2$$

§9. 在 С. Л. Соболев 空间第一边值问题解的存在条件

在这一节中我们将给出一些条件，使得问题(1.1.4),(1.1.5)具

有平方可积弱导数的解存在．在这些条件下，如果问题的弱解的唯一性定理的假设满足，那么这些条件就保证了(1.1.4)，(1.1.5)的弱解的一定光滑性．

这一节的论证基本上依据 Kohn 和 Mirenberg[64,147]的文章．

为了简单起见，我们假设方程

$$L(u)=a^{kj}u_{x_kx_j}+b^ku_{x_k}+cu=f \tag{1.9.1}$$

的系数是在 $\Omega\cup\Sigma$ 内无穷次可微（或者充分光滑）的函数，在(1.1.5)中的边界函数 g 等于零，并且对于充分大的 n，区域 $\Omega\in A^{(n)}$．

象在 § 8 中那样，我们记

$$D_{\bar{s}_l}u=\frac{\partial}{\partial x_{s_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{s_l}}u,\quad \bar{S}_l=(s_1,\cdots,s_l),$$
$$s_j=1,\cdots,m$$

而且当 $s_j\neq m$ 时，

$$D'_{\bar{s}_l}u=\frac{\partial}{\partial y_{s_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y_{s_l}}u$$

我们用 $W_2^k(\Omega)$ 表示在区域 Ω 内存在直到 k 阶弱导数的函数空间，而且

$$\|u\|_{k;\Omega}^2=\int_\Omega\sum_{l=0}^{k}\sum_{\bar{s}_l}(D_{\bar{s}_l}u)^2dx<\infty$$

对于 $k=0$ 的情况，我们也采用符号 $\|u\|_{0;\Omega}=\|u\|_0$．在边界 Σ 上的点 P_1 的邻域 ω 内，我们引入局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得边界 Σ 位于平面 $y_m=0$ 内，而且在 Ω 内 $y_m>0$．令 G_δ^1 表示集合 Σ_1 的 δ 邻域，G_δ^2 表示集合 Σ_2 的 δ 邻域，设 δ 相当小，使得 G_δ^1 和 G_δ^2 可以用区域 ω 复盖，在这些区域中存在具有上述性质的局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$． 我们定义

$$\|{}_1u\|_N^2=\int_{G_\delta^2}\Big[\sum_{\bar{s}_l,l\leq N}|D'_{\bar{s}_l}u|^2$$
$$+\sum_{\substack{\bar{s}_l\\ l+k\leq N,k\geq 1}}|y_m|^{k-1}\Big(\frac{\partial^k}{\partial y_m^k}D'_{\bar{s}_l}u\Big)^2\Big]dy$$

$$+\int_{G_\delta^1}\sum_{\xi_1 l+k\leqslant N}|y_m|^k\left|\frac{\partial^k}{\partial y_m^k}D'_{\xi_l}u\right|^2dy$$

$$+\int_{\Omega\setminus(G_\delta^1\cup G_\delta^2)}\sum_{\xi_l l\leqslant N}(D_{\xi_l}u)^2dx \tag{1.9.2}$$

定理 1.9.1(参看[64]) 假设边界Σ和(1.9.1)的系数成立如下条件:

$$1)\qquad (\Sigma_1\cup\Sigma_0)\cap\overline{\Sigma_2\cup\Sigma_3}=\varnothing \tag{1.9.3}$$

2) 在Ω内系数 $c<-c_0<0$,而c_0是充分大的常数,依赖于a^{kj}, b^k以及它们的三阶和小于三阶的导数.

3) 在Σ_2的点上

$$\gamma\equiv 1+\frac{1}{2}\mu\frac{\alpha}{\tilde{b}^2}>0 \tag{1.9.4}$$

其中,$\tilde{b}=(b^k-a^{kj}_{x_j})F_{x_k}$, $\alpha=(b^k-a^{kj}_{x_j})(a^{rs}F_{x_r}F_{x_s})_{x_k}$, μ是正整数,方程$F=0$确定边界Σ,而且 grod$F$ 具有Σ的内法线方向(显然,在Σ_2上 $\tilde{b}<0$ 和 $\alpha\leqslant 0$,并且象引理 1.1.1 中所看到的那样,函数$\tilde{b}$和α关于自变量的非退化变换是不变的).

4) 在Σ_2的点上

$$\frac{\sqrt{L_0(a)}}{|\tilde{b}|}\leqslant K_1\frac{\gamma}{\mu} \tag{1.9.5}$$

其中,K_1是仅依赖于R^m空间的维数的一个常数,而

$$L_0\equiv a^{kj}\partial^2/\partial x_k\partial x_j,\quad a(x)=a^{kj}F_{x_k}F_{x_j}.$$

(如果点x_0是Σ_2的内点或者Σ_2的内点的极限,容易证明,在x_0处(1.9.5)的左端等于零,所以条件(1.9.5)是满足的.)

那么对于任意的函数$f\in W_2^\mu(\Omega)$,带有$g=0$的问题(1.1.4),(1.1.5)存在解$u(x)$,并且成立估计

$$\|u\|_\mu\leqslant C_1\|f\|_{\mu,\Omega} \tag{1.9.6}$$

其中,常数C_1与u无关,而μ是给定的正整数,而且在$\Omega\setminus(G_\delta^1\cup G_\delta^2)$内$u\in W_2^\mu$,在$\Sigma_2$的一个邻域内,当$\mu$是偶数时$u\in W_2^{\mu/2}$,当$\mu$是奇数时 $u\in W_2^{(\mu+1)/2}$;最后,在Σ_0的一个邻域内,当μ是偶数时 $u\in W_2^{\mu/2}$,当μ是奇数时 $u\in W_2^{(\mu-1)/2}$.

下面我们将给出在最简单情况下(当 $\Sigma=\Sigma_3$ 时)定理 1.9.1 的证明. 对于这种情况,象在定理 1.8.2 中那样,(1.1.4),(1.1.5)的解将作为椭圆型方程

$$\varepsilon\Delta u+L(u)=f,\ 在\ \Omega\ 内 \tag{1.9.7}$$

具有边界条件

$$u=0,\ 在\ \Sigma\ 上 \tag{1.9.8}$$

的解当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限来求得. 对于 Σ 包含集合 Σ_1 的情况, 在[64]中的定理 1.9.1 的证明中,在 Σ_1 的邻域内,类似于(1.9.7)的方程包含附加一个带小参数 ε 的 2μ 阶椭圆型算子. 由于证明的复杂性, 这里我们将不给出定理 1.9.1 的论断的完整证明. 关于(1.1.4), (1.1.5)解的光滑性的某些接近于定理 1.9.1 的结果, 已经在 § 8 中用其它方法证明过. 这些方法始终用到形如 (1.9.7), (1.9.8)的正则化.

定理 1.9.2 假设 $\Sigma=\Sigma_3$, $f\in W_2^\mu(\Omega)$, 在 Ω 内系数 $c<-c_0<0$, c_0 是充分大的常数, 依赖于 a^{kj}, b^k 以及它们的二阶和小于二阶的导数,并且假设(1.9.1)的系数和 Ω 的边界无限次可微(或者充分光滑). 那么,带有 $g=0$ 的(1.1.4),(1.1.5)在 $W_2^\mu(\Omega)$ 类中的解存在,而且

$$\|u\|_{\mu,\Omega}\leqslant C_2\|f\|_{\mu,\Omega} \tag{1.9.9}$$

其中 C_2 与 u 无关,而 μ 是正整数.

首先我们将证明某些辅助性结果.

我们引入一些记号. 对于在 $C_{(1)}(\Omega)$ 中的任意函数 u 和 v, 我们记

$$\begin{aligned}Q(u,v)\equiv\int_\Omega\Big[&-a^{kj}v_{x_k}u_{x_j}\\&-\varepsilon v_{x_k}u_{x_k}+\frac{1}{2}(b^k-a_{x_j}^{kj})(u_{x_k}v-v_{x_k}u)\\&+\frac{1}{2}(2c-b_{x_k}^k+a_{x_kx_j}^{kj})uv\Big]dx\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

下面, 符号 C_l 用来表示仅依赖于 a^{kj}, b^k 以及它们的直到二阶导数的常数,而 K_l 表示与参数 ε 无关的任意常数. 它们的标号仅限

于一个引理或定理的证明的范围内.

引理 1.9.1 假设 φ 是一个无限次可微函数,其支集包含在点 $x_0\in\Sigma$ 的一个小邻域 U 内(因此在 U 内可以引入局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$,使得 Σ 位于平面 $y_m=0$ 内,而且在区域 Ω 内 $y_m>0$),则对于 $l\geqslant 1$,有

$$
\begin{aligned}
&Q(\varphi D'_{s_l}u,\varphi D'_{s_l}u)-(-1)^l Q(u,D'_{s_l}\varphi^2 D'_{s_l}u)\\
&\quad\leqslant C_1\Big\{\sum_{\bar{s}_{l-1}}\|\psi D'_{s_{l-1}}u_{y_m}\|_0^2+\sum_{\bar{s}_l}\|\psi D'_{s_l}u\|_0^2\Big\}\\
&\qquad+K_1\Big\{\sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l-1}\|\psi D'_{s_\rho}u\|_0^2\\
&\qquad+\sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l-2}\|\psi D'_{s_\rho}u_{y_m}\|_0^2\Big\}
\end{aligned}
\tag{1.9.11}
$$

其中,$u\in C^{(l+1)}(\bar{\Omega})$,$\psi\in C^\infty(\bar{\Omega})$,在 $\operatorname{supp}\varphi$ 上 $\psi\geqslant 1$,而且在 U 外 $\psi=0$.

证明 我们把(1.9.11)右端以 C_s 与 K_ρ 代替 C_1 与 K_1 的表达式用记号 $R(C_s,K_\rho)$ 来表示.令 $(v,w)=\int_\Omega vw\,dx$. 容易看出

$$Q(u,v)=\sum_i(M_iu,L_iv)$$

其中,M_i 和 L_i 是一阶微分算子,它们在局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$ 中取形式

$$M_i=a_i\frac{\partial}{\partial y_m}+\sum_{k=1}^{m-1}b_i^k\frac{\partial}{\partial y_k}+c_i$$

$$L_i=\alpha_i\frac{\partial}{\partial y_m}+\sum_{k=1}^{m-1}\gamma_i^k\frac{\partial}{\partial y_k}+r_i \tag{1.9.12}$$

其中 a_i, α_i, b_i^k, γ_i^k 与 c 无关.

考虑算子 $A=\varphi D'_{s_l}$ 和 $A^*=(-1)^l D'_{s_l}\varphi$. 下面等式成立:

$$2[Q(Au,Au)-Q(u,A^*Au)]$$

$$
\begin{aligned}
&= [Q(Au, Au) - Q(u, A^*Au)] \\
&\quad + [Q(A^*Au, u) - Q(u, A^*Au)] \\
&\quad + [Q(Au, Au) - Q(A^*Au, u)] \\
&= -\{(M_i Au, [A, L_i]u) + (M_i u, [L_i, A^*]Au)\} \\
&\quad - \{(L_i Au, [A, M_i]u) + ([M_i, A^*]Au, L_i u)\} \\
&\quad + [Q(A^*Au, u) - Q(u, A^*Au)] \qquad (1.9.13)
\end{aligned}
$$

其中，对于任意两个算子 A 和 B 定义 $[A, B] = AB - BA$. 这里假设对重复指标 i 求和. 我们来估计(1.9.13)最后部分的各项.

显然,由变换导出恒等式

$$
\begin{aligned}
&(M_i Au, [A, L_i]u) + (M_i u, [L_i, A^*]Au) \\
&\quad = ([A, M_i]u, [L_i, A]u) \\
&\qquad - ((A - A^*)M_i u, [L_i, A]u) \\
&\qquad + (M_i u, [L_i, A^* - A]Au) \\
&\qquad + (M_i u, [[L_i, A], A]u) \qquad (1.9.14)
\end{aligned}
$$

再利用算子 M_i 和 L_i 的表达式(1.9.12), 得到

$$
\begin{aligned}
([A, M_i]u, [L_i, A]u) = -\Big(& [A, a_i]u_{y_m} - a_i A_{(y_m)} u \\
& + \sum_{k=1}^{m-1}\left[A, b_i^k \frac{\partial}{\partial y_k}\right] u + [A, c_i]u, [A, \alpha_i]u_{y_m} \\
& - \alpha_i A_{(y_m)} u + \sum_{k=1}^{m-1}\left[A, \gamma_i^k \frac{\partial}{\partial y_k}\right] u + [A, r_i]u \Big)
\end{aligned}
$$

其中算子 $A_{(y_m)}$ 是由方程 $A_{(y_m)} = \varphi_{y_m} D'_{s_l}$ 定义的. 下面的估计是显然的:

$$
\begin{aligned}
&\|[A, a_i]u_{y_m}\|_0^2 + \|[A, \alpha_i]u_{y_m}\|_0^2 \\
&\quad \leqslant C_2 \sum_{s_{l-1}} \|\psi D'_{s_{l-1}} u_{y_m}\|_0^2 \\
&\qquad + K_2 \sum_{s_p, p \leqslant l-2} \|\psi D'_{s_p} u_{y_m}\|_0^2
\end{aligned}
$$

$$
\|a_i A_{(y_m)} u\|_0^2 + \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \left\| \left[A, b_i^k \frac{\partial}{\partial y_k}\right] u \right\|_0^2 \right.
$$

$$+\left\|\left[A,\gamma_i^k\frac{\partial}{\partial y_k}\right]u\right\|_0^2\Big\}+\|\alpha_l A_{(y_m)}u\|_0^2$$

$$\leqslant C_3\sum_{s_l}\|\phi D'_{s_l}u\|_0^2+K_3\sum_{s_\rho,\rho\leqslant l-1}\|\phi D'_{s_\rho}u\|_0^2$$

$$\|[A,c_l]u\|_0^2+\|[A,r_l]u\|_0^2$$

$$\leqslant K_4\sum_{s_\rho,\rho\leqslant l-1}\|\phi D'_{s_\rho}u\|_0^2$$

从上面得到的估计推得 $|([A,M_l]u,[L_l,A]u)|\leqslant R(C_4,K_5)$. 用类似方法,我们估计积分 $((A-A^*)M_lu,[L_l,A]u)$. 我们进一步考察(1.9.14)右端的积分 $(M_lu,[[L_l,A],A]u)$ 和 $(M_lu,[L,A^*-A]Au)$. 利用表达式(1.9.12),我们得到

$$\begin{aligned}(M_lu,[[L_l,A],A]u)=(M_lu,&[[\alpha_l,A],A]u_{y_m}\\&+[\alpha_lA_{(y_m)},A]u+[[r_l,A],A]u\\&+[\alpha_l,A]A_{(y_m)}u\\&+\sum_{k=1}^{m-1}\left[\left[\gamma_l^k\frac{\partial}{\partial y_k},A\right],A\right]u\Big)\end{aligned}\tag{1.9.15}$$

我们用分部积分变换(1.9.15)右端的积分,并且注意 $[[\alpha_l,A],A]$ 是只包含对变量 $y_1,\cdots,y_{m-1}$ 微分的 $2l-2$ 阶微分算子. 再注意 $[\alpha_lA_{(y_m)},A]$, $[[r_l,A],A]$, $[\alpha_l,A]A_{(y_m)}$ 和 $\sum_{k=1}^{m-1}\left[\left[\gamma_l^k\frac{\partial}{\partial y_k},A\right],A\right]$ 也是只包含对变量 $y_1,\cdots,y_{m-1}$ 微分阶数不大于 $2l-1$ 的微分算子,从(1.9.15)我们得到估计:

$$|(M_lu,[[L_l,A],A]u)\leqslant R(C_5,K_6)$$

用完全同样的方法,我们估计积分 $(M_lu,[L_l,A^*-A]Au)$. 结果有

$$\begin{aligned}&|(M_lAu,[A,L_l]u)+(M_lu,[L_l,A^*]Au)|\\&\quad\leqslant R(C_6,K_7)\end{aligned}$$

对于(1.9.13)最后部分的余下的两项,可以用类似方法加以估计;

从这些结果推得引理的论断.

引理 1.9.2 假设定理 1.9.1 的条件 2) 满足，令 $u_\varepsilon(x)$ 是方程

$$L_\varepsilon(u) = \varepsilon\Delta u + L(u) = f \ (\text{在}\ \Omega\ \text{内}),$$
$$\varepsilon = \text{const} > 0 \tag{1.9.16}$$

具有条件

$$u = 0(\text{在}\ \Sigma\ \text{上}) \tag{1.9.17}$$

的解，又设 $u_\varepsilon \in C^{(\mu+2)}(\bar{\Omega})$; $f \in W_2^\mu(\Omega)$. 则对于任意的 $l \leqslant \mu$, 估计

$$c_0\|\varphi D'_{\bar{s}_l}u_\varepsilon\|_0^2 \leqslant K_8 \sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l} \|\phi D'_{\bar{s}_\rho} f\|_0^2$$

$$+ C_7\left\{\sum_{\bar{s}_l} \|\phi D'_{\bar{s}_l} u_\varepsilon\|_0^2 + \sum_{\bar{s}_{l-1}} \|\phi D'_{\bar{s}_{l-1}} u_{\varepsilon y_m}\|_0^2\right\}$$

$$+ K_9\left\{\sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l-1} \|\phi D'_{\bar{s}_\rho} u_\varepsilon\|_0^2\right.$$

$$\left.+ \sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l-2} \|\phi D'_{\bar{s}_\rho} u_{\varepsilon y_m}\|_0^2\right\} \tag{1.9.18}$$

成立，其中函数 φ 和 ϕ 是象引理 1.9.1 中那样予以定义的. 如果 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 则对于 $l \leqslant \mu$, 有

$$c_0\|\varphi D_{\bar{s}_l}u_\varepsilon\|_0^2 \leqslant K_{10} \sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l} \|\phi D_{\bar{s}_\rho} f\|_0^2$$

$$+ C_8 \sum_{\bar{s}_l} \|\phi D_{\bar{s}_l} u_\varepsilon\|_0^2$$

$$+ K_{11} \sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l-1} \|\phi D_{\bar{s}_\rho} u_\varepsilon\|_0^2 \tag{1.9.19}$$

其中 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 并且在 φ 的支集上 $\phi \geqslant 1$.

证明 对于 Σ 上等于 0 的任意光滑函数 u 和 v, 我们有等式

$$-(L_\varepsilon(u), v) = Q(u, v) \tag{1.9.20}$$

根据定理 1.9.1 的假设 2), 我们可以假设在 Ω 内

$$c_0 + b_{x_k}^k - a_{x_k x_l}^{kl} \geqslant 0$$

因此从(1 9.10)推得，对于在Σ上等于零的任意光滑函数v，

$$Q(v, v) \geqslant \frac{c_0}{2} \|v\|_0^2 \qquad (1.9.21)$$

在(1.9.21)中，我们用 $v = \varphi D'_{s_l} u_\varepsilon$ 来代替，得到

$$\frac{c_0}{2} \|\varphi D'_{s_l} u_\varepsilon\|_0^2 \leqslant Q(\varphi D'_{s_l} u_\varepsilon, \varphi D'_{s_l} u_\varepsilon) \qquad (1.9.22)$$

用引理 1.9.1 的不等式(1.9.11)来估计(1.9.22)的右端. 我们有

$$\begin{aligned} &Q(\varphi D'_{s_l} u_\varepsilon, \varphi D'_{s_l} u_\varepsilon) \\ &\quad \leqslant |Q(u_\varepsilon, D'_{s_l} \varphi^2 D'_{s_l} u_\varepsilon)| + R(C_1, K_1) \end{aligned} \qquad (1.9.23)$$

从(1.9.20)得到

$$\begin{aligned} |Q(u_\varepsilon, D'_{s_l} \varphi^2 D'_{s_l} u_\varepsilon)| &= |(f, D'_{s_l} \varphi^2 D'_{s_l} u_\varepsilon)| \\ &\leqslant \{\|\varphi D'_{s_l} u_\varepsilon\|_0^2 + \|\varphi D'_{s_l} f\|_0^2\} \end{aligned} \qquad (1.9.24)$$

从估计(1.9.22)—(1 9.24)推出(1.9.18).

用类似的方法可以证明不等式(1.9.19). 对于这种情况需要说明的是：如果 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，则除了可以引入某些简化外，跟证明引理 1.9.1 一样，可以得到如下形式的估计

$$\begin{aligned} Q(\varphi C_{\bar{s}_l} \dot{u}, \varphi D_{\bar{s}_l} u) &\leqslant (-1)^l Q(u, D_{\bar{s}_l} \varphi^2 D_{\bar{s}_l} u) \\ &+ C_9 \sum_{\bar{s}_l} \|\phi D_{\bar{s}_l} u\|_0^2 \\ &+ K_{12} \sum_{\bar{s}_p, p \leqslant l-1} \|\phi D_{\bar{s}_p} u\|_0^2 \end{aligned} \qquad (1.9.25)$$

从而引理证毕.

定理 1.9.2 的证明 问题(1.1.4),(1.1.5)($g = 0$)的解，将作为具有条件(1.9.17)的椭圆型方程(1.9.16)的解在 $\varepsilon \to 0$ 时的极限而得到. 我们首先假设 $f \in C^\infty(\Omega \cup \Sigma)$. 令 $\{\Omega_j\}(j = 1, \cdots, N)$ 是 $\Omega \cup \Sigma$ 的这样的有限覆盖：Ω_1 不含有边界的点，而对于 $j > 1$ 的 Ω_j 含有Σ的点，并且 Ω_j 相当小，使得在 Ω_j 内可以引入局部坐标 $y_1, \cdots, y_m$，并且使边界Σ位于平面 $y_m = 0$ 内，且对于Ω的点有 $y_m > 0$. 令 $\{\varphi_j\}$, $\{\chi_j\}$ 和 $\{\psi_j\}$ 是对应于覆盖 $\{\Omega_j\}$ 的单位分解(参看第二章 § 1)，在 φ_j 的支集上，$\chi_j \geqslant \gamma = \text{const} > 0$，而且在 χ_j，

$j=1,\cdots,N$ 的支集上 $\phi_j\geqslant\gamma$. 我们将证明

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\mu,Q}\leqslant C_1\|f\|^2_{\mu;Q} \tag{1.9.26}$$

其中,常数 C_1 与 ε 无关. 从估计 (1.9.26) 推得: 可以找一个序列 $\varepsilon\to 0$, 使得在空间 $W^{\mu}_2(Q)$ 中 $u_\varepsilon(x)\to u(x)$ 弱收敛,并且对于极限函数 $u(x)$,成立(1.9.9),即对于 $\mu\geqslant 2$, $u(x)$ 是(1.1.4),(1.1.5)的具有所要求性质的解. 从 Соболев 嵌入定理(参看 [125, 84, 139]或第二章 § 1)推得, 如果 $2(\mu-k)>m$, 则 $u(x)\in C^{(k)}(Q)$. 我们指出, 如果 f 属于$W^{\mu}_2(Q)$, 那么我们可以用 $C^\infty(Q\cup\Sigma)$ 类中的函数 f_n 在 $W^{\mu}_2(Q)$ 的范数下来逼近它, 而且(1.1.4), (1.1.5)的解可以作为 $\frac{1}{n}$ 和 ε 通过某一序列趋于 0 时 u_ε 的极限来获得.

因此为了证明定理 1.9.2, 只要得到估计 (1.9.26) 就够了.

显然不等式

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|^2_{\mu;Q}&\leqslant N\sum_{j}^{N}\|\varphi_j u_\varepsilon\|^2_{\mu;Q}\\ &\leqslant 2N\sum_{\bar{s}_\mu}\|\varphi_1 D_{\bar{s}_\mu}u_\varepsilon\|^2_0+K_1\|u_\varepsilon\|^2_{\mu-1,Q}\\ &\quad+2N\sum_{j>1}\sum_{l+r=\mu}\sum_{\bar{s}_l}\left\|\varphi_j\frac{\partial^r}{\partial y_m^r}D'_{s_l}u_\varepsilon\right\|^2_0\end{aligned} \tag{1.9.27}$$

成立. 根据引理 1.9.2, 对于具有函数 $\phi=\phi_1/\gamma$ 的积分 $\|\varphi_1 D_{\bar{s}_\mu}u_\varepsilon\|^2_0$, 估计 (1.9.19) 成立. 现在我们来估计关系式(1.9.27)的最后和式. 我们证明,对于任意的 $\delta_1>0$ 和 $l\leqslant\mu$,

$$\begin{aligned}&\sum_{\bar{s}_p,p+r=l}\left\|\varphi_j\frac{\partial^r}{\partial y_m^r}D'_{s_p}u_\varepsilon\right\|^2_0\\ &\leqslant\left(\delta_1+\frac{C_1}{c_0\delta_1}\right)\sum_{\bar{s}_p,p+r=l}\left\|\phi_j\frac{\partial^r}{\partial y_m^r}D'_{s_p}u_\varepsilon\right\|^2_0\\ &\quad+K_2[\|f\|^2_{l;Q}+\|u_\varepsilon\|^2_{l-1;Q}]\end{aligned} \tag{1.9.28}$$

为此目的,在 $\omega_j=Q_j\cap Q$ 内, $j>1$, 我们用局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$ 来写出(1.9.16). 我们有

$$L_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon\mu^{kj}u_{y_k y_j} + \varepsilon\nu^k u_{y_k} + \alpha^{kj}u_{y_k y_j} + \beta^k u_{y_k} + cu = f$$

根据形式 $Q(u, v)$ 的定义，对于支集在 $\omega_j(j > 1)$ 内的任一光滑函数 u，我们有

$$\begin{aligned}
&((\alpha^{mm} + \varepsilon\mu^{mm})u_{y_m}, u_{y_m}) \\
&\leqslant C_2\left\{Q(u, u) + 2\left|\sum_{k=1}^{m-1}((\alpha^{mk} + \varepsilon\mu^{mk})u_{y_k}, u_{y_m})\right|\right. \\
&\quad \left. + \sum_{k,p=1}^{m-1}((\alpha^{kp} + \varepsilon\mu^{kp})u_{y_k}, u_{y_p})\right\} + K_3\|u\|_0^2 \qquad (1.9.29)
\end{aligned}$$

由于 $\Sigma = \Sigma_3$，只要区域 Ω_j 充分小，那么在 ω_j 内我们有

$$\alpha^{mm} > \frac{1}{2}\max_{\omega_j}\alpha^{mm} > 0 \qquad (1.9.30)$$

因此，考虑到对于 $u = \varphi_j u_\varepsilon$ 的不等式(1.9.29)，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 &\leqslant C_3[((\alpha^{mm} + \varepsilon\mu^{mm})(\varphi_j u_\varepsilon)_{y_m}, (\varphi_j u_\varepsilon)_{y_m}) \\
&\quad + \|\phi_j u_\varepsilon\|_0^2] \\
&\leqslant C_4[Q(\varphi_j u_\varepsilon, \varphi_j u_\varepsilon) \\
&\quad + 2\left|\sum_{k=1}^{m-1}((\alpha^{mk} + \varepsilon\mu^{mk})(\varphi_j u_\varepsilon)_{y_k}, (\varphi_j u_\varepsilon)_{y_m})\right| \\
&\quad + \sum_{k,p=1}^{m-1}((\alpha^{kp} + \varepsilon\mu^{kp})(\varphi_j u_\varepsilon)_{y_k}, (\varphi_j u_\varepsilon)_{y_p})] \\
&\quad + K_4\|\phi_j u_\varepsilon\|_0^2
\end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 &\leqslant \delta_1\|\phi_j u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 \\
&\quad + \frac{C_5}{\delta_1}\sum_{\bar{s}_1}\|\chi_j D'_{s_1}u_\varepsilon\|_0^2 + C_4 Q(\varphi_j u_\varepsilon, \varphi_j u_\varepsilon) \\
&\quad + K_5\|\phi_j u_\varepsilon\|_0^2 \qquad (1.9.31)
\end{aligned}$$

应用 (1.9.20) 不难证明

$$\begin{aligned}
Q(\varphi_j u_\varepsilon, \varphi_j u_\varepsilon) &\leqslant K_6\{\|\phi_j f\|_0^2 + \|\phi_j u_\varepsilon\|_0^2\} \\
&\quad + \delta_1\sum_{\bar{s}_1}\|\phi_j D'_{s_1}u_\varepsilon\|_0^2 + \delta_1\|\phi_j u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 \qquad (1.9.32)
\end{aligned}$$

其中常数 K_6 依赖于 δ_1.

由取 $l=1$ 的不等式(1.9.18),我们推得

$$\|\chi_l D'_{s_1} u_\varepsilon\|_0^2 + \|\varphi_l D'_{s_1} u_\varepsilon\|_0^2$$

$$\leqslant K_7 \left\{ \sum_{\bar{s}_1} \|\phi_l D'_{s_1} f\|_0^2 + \|\phi_l f\|_0^2 + \|\phi_l u_\varepsilon\|_0^2 \right\}$$

$$+ \frac{C_6}{c_0} \left\{ \sum_{\bar{s}_1} \|\phi_l D'_{s_1} u_\varepsilon\|_0^2 + \|\phi_l u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 \right\} \tag{1.9.33}$$

从估计(1.9.31),(1.9.32)和(1.9.33),得到

$$\sum_{\bar{s}_1} \|\varphi_l D'_{s_1} u_\varepsilon\|_0^2 + \|\varphi_l u_{\varepsilon y_m}\|_0^2$$

$$\leqslant \left(2\delta_1 + \frac{C_7}{c_0 \delta_1}\right) \left\{ \|\phi_l u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 + \sum_{\bar{s}_1} \|\phi_l D'_{s_1} u_\varepsilon\|_0^2 \right\}$$

$$+ K_8 \{ \|f\|_{1;\Omega}^2 + \|u_\varepsilon\|_0^2 \} \tag{1.9.34}$$

这表示当 $l=1$ 时,不等式(1.9.28)成立.

我们用归纳法证明 (1.9.28) 对于任意的 $l \leqslant \mu$ 成立. 假设它对于 $l=l_0$ 成立, 我们证明这个关系式对于 $l=l_0+1$ 也成立. 从(1.9.18)推得

$$\|\chi_l D'_{s_{l_0+1}} u_\varepsilon\|_0^2 + \|\varphi_l D'_{s_{l_0+1}} u_\varepsilon\|_0^2$$

$$\leqslant \frac{C_8}{c_0} \left[\sum_{\bar{s}_{l_0+1}} \|\phi_l D'_{s_{l_0+1}} u_\varepsilon\|_0^2 + \sum_{\bar{s}_{l_0}} \|\phi_l D'_{s_{l_0}} u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 \right]$$

$$+ K_9 (\|f\|_{l_0+1;\Omega}^2 + \|u_\varepsilon\|_{l_0;\Omega}^2) \tag{1.9.35}$$

我们考虑对于 $u=\varphi_l D'_{s_{l_0}} u_\varepsilon$ 的不等式 (1.9.29), 并考虑到条件(1.9.30),正如获得不等式(1.9.31)那样,我们得到如下的估计

$$\sum_{\bar{s}_{l_0}} \|\varphi_l D'_{s_{l_0}} u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 \leqslant C_9 \sum_{\bar{s}_{l_0}} Q\,(\varphi_l D'_{s_{l_0}} u_\varepsilon, \varphi_l D'_{s_{l_0}} u_\varepsilon)$$

$$+ \delta_1 \sum_{\bar{s}_{l_0}} \|\phi_l D'_{s_{l_0}} u_{\varepsilon y_m}\|_0^2 + \frac{C_{10}}{\delta_1} \sum_{\bar{s}_{l_0+1}} \|\chi_l D'_{s_{l_0+1}} u_\varepsilon\|_0^2$$

$$+ K_{10} \left\{ \sum_{s_p, p \leqslant l_0} \|\phi_l D'_{s_p} u_\varepsilon\|_0^2 \right.$$

$$+\sum_{\bar{s}_\rho,\rho\leqslant l_0-1}\|\phi_l D'_{s_\rho}u_{\varepsilon y_m}\|_0^2\Big\}\tag{1.9.36}$$

从引理 1.9.1 推得不等式

$$\sum_{\bar{s}_{l_0}}Q(\varphi_l D'_{s_{l_0}}u_\varepsilon,\varphi_l D'_{s_{l_0}}u_\varepsilon)$$
$$\leqslant|Q(u_\varepsilon,D'_{s_{l_0}}\varphi_l^2 D'_{s_{l_0}}u_\varepsilon)|+K_{11}\|\phi_l u_\varepsilon\|_{l_0;\Omega}^2\tag{1.9.37}$$

因为在 Σ 上 $D'_{\bar{s}_{l_0}}\varphi_l^2 D'_{\bar{s}_{l_0}}u_\varepsilon=0$，所以我们可以从(1.9.20),(1.9.37)推得

$$\sum_{\bar{s}_{l_0}}Q(\varphi_l D'_{\bar{s}_{l_0}}u_\varepsilon,\ \varphi_l D'_{s_{l_0}}u_\varepsilon)$$
$$\leqslant K_{12}\{\|f\|_{l_0;\Omega}^2+\|\phi_l u_\varepsilon\|_{l_0;\Omega}^2\}$$

从(1.9 36)和最后的不等式得出

$$\sum_{\bar{s}_{l_0}}\|\varphi_l D'_{\bar{s}_{l_0}}u_{\varepsilon y_m}\|_0^2$$
$$\leqslant\left(\delta_1+\frac{C_{11}}{\delta_1 c_0}\right)\Big\{\sum_{\bar{s}_{l_0}}\|\phi_l D'_{\bar{s}_{l_0}}u_{\varepsilon y_m}\|_0^2$$
$$+\|\phi_l D'_{\bar{s}_{l_0+1}}u_\varepsilon\|_0^2\Big\}$$
$$+K_{13}\{\|f\|_{l_0+1;\Omega}^2+\|\phi_l u_\varepsilon\|_{l_0;\Omega}^2\}\tag{1.9.38}$$

现在我们将 $r\geqslant 2$，$\rho+r=l_0+1$ 的算子 $\varphi_l D'_{s_\rho}\partial^{r-2}/\partial y_m^{r-2}$ 作用到方程 $L_\varepsilon(u)=f$ 上去，得到

$$(\alpha^{mm}+\varepsilon\mu^{mm})\varphi_l D'_{s_\rho}\frac{\partial^r u_\varepsilon}{\partial y_m^r}$$
$$=-2\sum_{k=1}^{m-1}(\alpha^{km}+\varepsilon\mu^{km})\varphi_l D'_{s_\rho}\frac{\partial^r u_\varepsilon}{\partial y_k\partial y_m^{r-1}}$$
$$-\sum_{s,k=1}^{m-1}(\alpha^{ks}+\varepsilon\mu^{ks})\varphi_l D'_{s_\rho}\frac{\partial^r u_\varepsilon}{\partial y_m^{r-2}\partial y_k\partial y_s}$$
$$+\varphi_l D'_{s_\rho}\frac{\partial^{r-2}f}{\partial y_m^{r-2}}+A_{l_0}u_\varepsilon\tag{1.9.39}$$

其中，A_{l_0} 是 l_0 阶的线性微分算子，其系数在 $\mathrm{supp}\varphi_j$ 外等于0. 记住条件(1.9.30)，从(1.9.39)得出，对于 $\rho+r=l_0+1$，有

$$\left\|\varphi_j D_{s_\rho}^{\prime} \frac{\partial^r u_\varepsilon}{\partial y_m^r}\right\|_0^2 \leqslant C_{12}\left[\sum_{\bar{s}_\nu, \nu+r-1=l_0+1}\left\|\varphi D_{s_\nu}^{\prime} \frac{\partial^{r-1} u_\varepsilon}{\partial y_m^{r-1}}\right\|_0^2\right.$$

$$\left.+\sum_{\bar{s}_\gamma, \gamma+r-2=l_0+1}\left\|\varphi_j D_{s_\gamma}^{\prime} \frac{\partial^{r-2} u_\varepsilon}{\partial y_m^{r-2}}\right\|_0^2\right]$$

$$+K_{14}\left(\|f\|_{l_0+1; \Omega}^2+\|u_\varepsilon\|_{l_0, \Omega}^2\right) \tag{1.9.40}$$

因此，如果假设形如

$$\sum_{\bar{s}_\rho; \rho+r=l_0+1}\left\|\varphi_j D_{s_\rho}^{\prime} \frac{\partial^r u_\varepsilon}{\partial y_m^r}\right\|_0^2$$

$$\leqslant\left(\delta_1+\frac{C_{14}}{\delta_1 c_0}\right) \sum_{\bar{s}_\rho; \rho+r=l_0+1}\left\|\phi_j D_{s_\rho}^{\prime} \frac{\partial^r u_\varepsilon}{\partial y_m^r}\right\|_0^2$$

$$+K_{15}\left(\|f\|_{l_0+1, \Omega}^2+\|u_\varepsilon\|_{l_0; \Omega}^2\right) \tag{1.9.41}$$

的估计对于 $r \leqslant r_0$ 成立，则从(1.9.40)推得同样形式(1.9.41)对于 $r=r_0+1$ 也是成立的。因为由于(1.9.38)和(1.9.35)，(1.9.41)对于 $r=1$ 成立，从而推得(1.9.41)对于 $\rho+r \leqslant l_0+1$ 的所有 ρ 和 r 都成立，即对于 $l=l_0+1$，(1.9.28)成立。

我们利用不等式(1.9.28)来估计(1.9.27)中最后和式的各项。假设常数 δ_1 取充分小，而且根据定理1.9.1的条件2)，常数 c_0 充分大，我们利用(1.9.27)得到估计

$$\|u_\varepsilon\|_{\mu; \Omega}^2 \leqslant C_{15}\{\|f\|_{\mu; \Omega}^2+\|u_\varepsilon\|_{\mu-1; \Omega}^2\} \tag{1.9.42}$$

用完全相同的方法，我们可以得到对于 $l \leqslant \mu$ 的估计

$$\|u_\varepsilon\|_{l; \Omega}^2 \leqslant C_{16}\{\|f\|_{l; \Omega}^2+\|u_\varepsilon\|_{l-1; \Omega}^2\} \tag{1.9.43}$$

由于

$$\|u_\varepsilon\|_0^2 \leqslant C_{17}\|f\|_0^2 \tag{1.9.44}$$

显然成立，因而从(1.9.42)—(1.9.44)推得估计(1.9.26)，定理证毕。

如果 $\mu=1$，则定理1.9.2推得问题(1.1.4)，(1.1.5)在积分等式(1.5.3)意义下弱解存在的条件。

第二章　二阶微分方程的弱解的局部光滑性和亚椭圆性

第二章基本上涉及了具非负特征形式的二阶方程弱解的局部光滑性的研究，特别是亚椭圆性条件的研究。

正如我们在引言中说过，形式(9)的二阶方程类的亚椭圆性条件首先是由 Hörmander 的论文[55]给出的，对于一般二阶方程的情况则是在[113]和第二章 §5，§6 中给出的。Hörmander 的证明利用了李代数理论的某些结果和特殊的函数空间。Hörmander 关于亚椭圆性定理的其它证明基于拟微分算子理论，将在本章 §5 中给出。

在 §6 中给出具非负特征形式但不可能表为形式(9)的二阶亚椭圆型方程的一些例子。在这一节中给出关于一般二阶方程亚椭圆性的结果。在 §5 中还证明 Hörmander 定理的条件可以减弱。对于一般二阶方程类似的定理在 §6 中证明。在 §5 和 §6 中，方程的亚椭圆性是作为 Schauder 型先验估计的推论来证明的。在 §7 中借助于 M. B. Келдыш[63] 方法，利用这些估计来构造在非光滑区域上亚椭圆型方程第一边值问题的解。在 §1 和 §2 中发展了关于空间 $\mathscr{H}_s$ 和关于拟微分算子的基本结果，并给出研究这些问题的文献的详细摘要。在 §8 中给出具解析系数的二阶方程亚椭圆性的充分和必要条件。

§1. $\mathscr{H}_s$ 空间

这一节是辅助性质的。我们在这里讨论空间 $\mathscr{H}_s$ 的性质，它是我们处理问题时所必需的。

我们先给出后面需要的一些符号、定义和广义函数论的定理。令 Ω 是 m 维空间 R^m 的一个区域，$u(x)$ 是 Ω 内的连续复函数。函

数 $u(x)$ 在 Ω 中的支集是集合 $\{x; x\in\Omega, u(x)\neq 0\}$ 的闭包. 函数 u 的支集用 $\operatorname{supp} u$ 表示.我们用 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 内无限次可微函数的集合,它们在 Ω 内具有紧支集. 对于 R^m 的任意集合 A, 我们把 $C_0^\infty(A)$ 理解为在 $C_0^\infty(R^m)$ 中使得 $\operatorname{supp}\varphi\subset A$ 的所有实函数 φ 的集合. 以下的单位分解定理成立.

定理 2.1.1 假设 Ω_1, $\cdots$, Ω_k 是开集, 而 K 是紧集, 使得 $\bigcup_1^k\Omega_j\supset K$. 那么存在这样的函数 $\varphi_j\in C_0^\infty(\Omega_j)$, 使得 $\varphi_j\geqslant 0$ 而且 $\Sigma_1^k\varphi_j\leqslant 1$,在 K 上具有 $\Sigma_1^k\varphi_j=1$.

我们用 α 表示多重指标 α_1, $\cdots$, α_m, 这里 α_j 是非负整数, 其和 $\Sigma_1^m\alpha_j$ 记为 $|\alpha|$,乘积 $\alpha_1!\cdots\alpha_m!$ 记为 $\alpha!$我们还引入符号

$$D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j},\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_m^{\alpha_m}$$

这里 $i=\sqrt{-1}$. 我们假设 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}$. 定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数 φ 上的泛函 $u(\varphi)$ 称为 Ω 内的广义函数,如果 $u(\varphi)$ 满足条件: 1) $u(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1u(\varphi_1)+c_2u(\varphi_2)$, 其中 c_1 和 c_2 是复数, φ_1, $\varphi_2\in C_0^\infty(\Omega)$; 2) 当 $n\to\infty$ 时, $u(\varphi_n)\to 0$, 如果序列 φ_n 在下面意义下收敛于 0 ;对于任意多重指标 α,当 $n\to\infty$ 时 $\sup_\Omega|D^\alpha\varphi_n|\to 0$,并且在 Ω 内存在一个紧集 K,它包含所有函数 φ_n 的支集.

可以用这种方法定义序列收敛于 0 的 C_0^∞ 函数的线性空间记为 $D(\Omega)$. 在 Ω 内的广义函数的这种定义等价于下面意义: 在 Ω 内的广义函数是定义在 $C_0^\infty(\Omega)$ 内的函数 φ 上的泛函 $u(\varphi)$,满足条件 1), 并且对于任何紧集 $K\subset\Omega$, 存在常数 C 和 K, 使得

$$|u(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup|D^\alpha\varphi|,\quad \varphi\in C_0^\infty(K)$$

在 Ω 内所有广义函数的集合将记为 $D'(\Omega)$. 显然, 在 $D'(\Omega)$ 中的广义函数形成一个向量空间, 具有通常加法和用复数乘法的运算定义:

$$(a_1u_1+a_2u_2)\varphi=a_1u_1(\varphi)+a_2u_2(\varphi);\ u_1,u_2\in D'(\Omega),$$
$$\varphi\in C_0^\infty(\Omega),\ a_1,\ a_2=\text{const}$$

如果对于任意函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi)$$

我们就称广义函数 $u(\varphi)$ 是 $D'(\Omega)$ 中广义函数 $u_j(\varphi)$ 在 $j\to\infty$ 时的极限. 可以证明,如果广义函数序列 $u_j(\varphi)$ 是这样的: 对于任意的函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 极限

$$\lim_{j\to\infty} u(\varphi) = u(\varphi)$$

存在,那么 $u(\varphi)$ 是 $D'(\Omega)$ 的广义函数. 如果对于一切 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, $u_1(\varphi)=u_2(\varphi)$, 其中 Ω_1 是点 x_0 的某邻域,我们就说 $D'(\Omega)$ 的两个广义函数 u_1 和 u_2 在点 $x_0\in\Omega$ 的邻域内相等.

对某个点 x, 假设不存在邻域使得 u 在那里等于零,所有这种点 x 的集合称为广义函数 $u(\varphi)$ 的支集.

从这个定义推得,在 Ω 中 $\operatorname{supp} u$ 的补集内 $u=0$, 即如果 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 而且 $\operatorname{supp} u\cap\operatorname{supp}\varphi=\varnothing$, 则 $u(\varphi)=0$. 这里及其它各处 $\varnothing$ 表示空集.

广义函数 $u\in D'(\Omega)$ 的导数 $D_k u$ 用方程

$$D_k u(\varphi) = -u(D_k\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

来定义. 显然, $D^\alpha u(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\varphi)$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$. 如果 $u\in D'(\Omega)$ 而 $a\in C^\infty(\Omega)$, 那么 $u(\varphi)$ 与 a 的乘积用公式

$$(au)(\varphi) = u(a\varphi),\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

定义. 假设 $p(\xi)$ 是 m 个变量 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ 带复系数的多项式. 我们用 $P(D)$ 表示 $p(\xi)$ 中用 D_j 代替 ξ_j 所得到的微分算子. 显然

$$P(D)e^{i\langle x,\xi\rangle} = p(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}$$

其中 $\langle x,\xi\rangle = x_1\xi_1+\cdots+x_m\xi_m$. 我们记

$$p^{(\alpha)}(\eta) = \frac{\partial^{|\alpha|}p(\eta)}{\partial\eta_1^{\alpha_1}\cdots\partial\eta_m^{\alpha_m}} = i^{|\alpha|}D_\eta^\alpha p(\eta)$$

成立广义的 Leibniz 公式

$$P(D)(au) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha a)(P^{(\alpha)}(D)u) \tag{2.1.1}$$

两个连续函数 u 和 φ(其中一个在 R^m 有紧支集)的卷积 $u*\varphi$ 用公式

$$(u*\varphi)(x)=\int u(x-y)\varphi(y)dy=\int u(y)\varphi(x-y)dy=(\varphi*u)(x)$$

定义.(这里及下面,如果没有明显标出积分区域,就是指整个 R^m 空间.)

如果 $u\in D'(R^m)$ 而且 $\varphi\in C_0^\infty(R^m)$,那么 $u*\varphi$ 表示用方程

$$(u*\varphi)(x)=u_y(\varphi(x-y)) \tag{2.1.2}$$

定义的函数,其中 u_y 表示 u 作用在 $\varphi(x-y)$ 时,将 $\varphi(x-y)$ 看作 y 的函数而 x 固定.

我们理解集合

$$A+B=\{x+y;\ x\in A;\ y\in B\}$$

为 R^m 中两个集合 A 和 B 的向量和.

定理 2.1.2 如果 $u\in D'(R^m)$ 而且 $\varphi\in C_0^\infty(R^m)$,那么 $u*\varphi\in C_0^\infty(R^m)$,而且 $\mathrm{supp}(u*\varphi)\subset\mathrm{supp}u+\mathrm{supp}\varphi$. 此外,

$$D^\alpha(u*\varphi)=(D^\alpha u)*\varphi=u*(D^\alpha\varphi)$$

定理 2.1.3 假设 $\varphi\in C_0^\infty(R^m)$,$\int\varphi dx=1$,$\varphi\geqslant 0$,$\mathrm{supp}\varphi=\{x,|x|\leqslant 1\}$,而且 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-m}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$,其中 $\varepsilon=\mathrm{const}>0$. 如果 $u\in D'(R^m)$,则 $u*\varphi_\varepsilon\in C^\infty(R^m)$,并且

$$\mathrm{supp}(u*\varphi_\varepsilon)\subset\mathrm{supp}u+\{x;\ |x|\leqslant\varepsilon\}$$

在 $D'(R^m)$ 内当 $\varepsilon\to 0$ 时,函数 $u*\varphi_\varepsilon\to u$.

函数 $f\in\mathscr{L}_1(R^m)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 用公式

$$\hat{f}(\xi)=\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)dx \tag{2.1.3}$$

定义. 如果 $\hat{f}(\xi)$ 也属于 $\mathscr{L}_1(R^m)$,那么反演公式

$$f(x)=(2\pi)^{-m}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi \tag{2.1.4}$$

成立. 我们用 S 表示所有这样函数 $\varphi\in C^\infty(R^m)$ 的集合:对于任意多重指标 α 和 β

$$\sup_x|x^\beta D^\alpha\varphi(x)|<\infty$$

如果在 S 上引进如下的半范系(参看[144]):

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup_{x\in R^m}|x^\beta D^\alpha\varphi(x)| \tag{2.1.5}$$

那么 S 类的函数形成一个局部紧致拓朴空间.显然 $C_0^\infty(R^m)\subset S$.

定理 2.1.4 Fourier 变换把 S 连续映入 S. 对 S 的函数逆 Fourier 变换的公式(2.1 4)成立. $D_j\varphi$ 的 Fourier 变换是 $\xi_j\hat\varphi(\xi)$, 而 $x_j\varphi$ 的 Fourier 变换是 $-D_j\hat\varphi(\xi)$.

定理 2.1.5 如果 φ 和 ϕ 是 S 的函数,那么有

$$\int\hat\varphi\phi dx=\int\varphi\hat\phi dx \tag{2.1.6}$$

$$\int\hat\varphi\bar{\hat\phi}d\xi=(2\pi)^m\int\varphi\bar\phi dx \tag{2.1.7}$$

$$\widehat{(\varphi*\phi)}=\hat\varphi\cdot\hat\phi \tag{2.1.8}$$

$$\widehat{(\varphi\cdot\phi)}=(2\pi)^{-m}\hat\varphi*\hat\phi \tag{2.1.9}$$

S 上的一个连续线性泛函称为空间 S' 的一个广义函数. 因为 $C_0^\infty\subset S$,而且由于在 $D(R^m)$ 中序列的收敛性推出它在 S 上的收敛性,所以在 S' 中,每个广义函数产生一个 $D(R^m)$ 上的连续线性泛函,即它是 $D'(R^m)$ 中的一个广义函数.

容易验证集合 C_0^∞ 在 S 中稠密,而且 S' 可以连续嵌入 $D'(R^m)$.

如果 $u\in S'$, 那么广义函数 $u(\varphi)$ 的 Fourier 变换 $\hat u$,用方程

$$\hat u(\varphi)=u(\hat\varphi),\ \varphi\in S \tag{2.1.10}$$

定义.

对于 S' 内的每个广义函数, Fourier 变换反演公式成立形式

$$\hat{\hat u}=(2\pi)^m\check u$$

其中对于 $\varphi\in S$, $\check\varphi=\varphi(-x)$, 而对于 S' 内的广义函数 $\check u(\varphi)=u(\check\varphi)$.

定理 2.1.6 如果 $D'(R^m)$ 内广义函数 $u(\varphi)$ 具有紧支集,那么 $u\in S'$,而且 u 的 Fourier 变换对于 ξ 的一切复值可以用公式

$$\hat u(\xi)=u_x(e^{-i(x,\xi)})$$

定义,并且 $\hat u(\xi)$ 是 ξ 的整解析函数.

定理 2.1.1—2.1.6 的证明可以在书 [40],[56],[120]或 [126] 中找到.

在函数空间 S 中，我们引入数量积

$$(u, v)_s = (2\pi)^{-m} \int (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi \qquad (2.1.11)$$

其中 s 是任意实数。此数量积生成范数

$$\|u\|_s^2 = (u,u)_s = (2\pi)^{-m} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (2.1.12)$$

空间 S 关于这个范数的闭包称为空间 $\mathscr{H}_s$。显然 $\mathscr{H}_s$ 是一个可分 Hilbert 空间。

定理 2.1.7 空间 $\mathscr{H}_s$ 同构于 S' 内广义函数 u 的子空间，此子空间的 $u(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{u}(\xi)$ 是一个普通函数，并且

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-m} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad (2.1.13)$$

证明 对于 $\mathscr{H}_s$ 中属于 S 的每个元素 u，我们用

$$u(\varphi) = \int u\varphi dx; \quad u, \varphi \in S$$

联系一个 S' 内的广义函数。如果序列 u_n 是 $\mathscr{H}_s$ 的基本列，那么它对应一个广义函数 $u(\varphi)$，在 S' 内等于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$。这个极限存在，这是因为对于每个 $\varphi \in S$，当 $n \to \infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} \int u_n \varphi dx$ 存在。事实上，利用 Parseval 方程和 Schwarz 不等式，我们得到

$$\left| \int (u_n - u_{n'}) \varphi dx \right| = |(u_n - u_{n'}, \bar{\varphi})_0| \leqslant \|u_n - u_{n'}\|_s \|\varphi\|_{-s}$$

$$(2.1.14)$$

因为序列 u_n 是基本列，所以当 $n, n' \to \infty$ 时，(2.1.14) 的右端趋于 0。我们将验证等于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 的广义函数具有 Fourier 变换 $\hat{u}(\xi)$，使得条件 (2.1.13) 满足。

因为

$$\|u_n - u_{n'}\|_s^2 = (2\pi)^{-m} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}_{n'} - \hat{u}_n|^2 d\xi$$

由此推得 $\hat{u}_n$ 构成具有 (2.1.12) 右端给出范数的函数空间的一个基本序列。这个空间的完备性可以从 $\mathscr{L}_2(R^m)$ 的完备性推得。因此存在一个函数 $\hat{u}(\xi)$ 使得条件 (2.1.13) 满足，而且

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)-\hat{u}_n(\xi)|^2 d\xi \to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时} \quad (2.1.15)$$

我们将证明函数 $\hat{u}(\xi)$ 是广义函数 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 的 Fourier 变换.

根据 (2.1.6) 和广义函数的 Fourier 变换的定义,有

$$\int \hat{u}_n \varphi dx = \int u_n \hat{\varphi} dx = u_n(\hat{\varphi}) = \hat{u}_n(\varphi)$$

在这些方程中,当 $n\to\infty$ 时取极限,并且注意 (2.1.15),我们得到

$$\int \hat{u}\varphi dx = u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi)$$

这表示 $\hat{u}(\xi)$ 是广义函数 $u(\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(\varphi)$ 的 Fourier 变换. 现在假设 $u(\varphi)$ 是 S' 中这样的一个广义函数: 其 Fourier 变换是满足条件 (2.1 13) 的函数 $\hat{u}(\xi)$. 我们构造函数序列 $\hat{u}_n(\xi)$, 使得 $\hat{u}_n(\xi)\in C_0^\infty(R^m)$ 并且

$$\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)-\hat{u}_n(\xi)|^2 d\xi \to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时}$$

那么由公式

$$u_n(x) = (2\pi)^{-m}\int e^{i(x,\xi)}\hat{u}_n(\xi)d\xi$$

定义的函数 u_n 属于空间 S,并且形成空间 $\mathscr{H}_s$ 中的基本序列. 从方程

$$\int \hat{u}_n \varphi dx = \int u_n \hat{\varphi} dx = u_n(\hat{\varphi})$$

推得对于任意函数 $\varphi\in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\hat{\varphi}) = \int \hat{u}\varphi dx = \hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$$

这表示序列 u_n 在 S' 中收敛于我们考虑的广义函数 $u(\varphi)$, 并且在空间 $\mathscr{H}_s$ 中是基本序列.

因此对于 $\mathscr{H}_s$ 的每个元素 u 以一对一的方式对应于 S' 的一个广义函数 $u(\varphi)$, 使得

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-m}\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

其中 $\hat{u}(\xi)$ 是广义函数 $u(\varphi)$ 的 Fourier 变换,而且 $\|u\|_s$ 是在空间 $\mathscr{H}_s$ 中的元素 u 的范数. 定理证毕.

容易证明空间 $\mathscr{H}_s$ 的如下性质:

1) 如果 $s < t$, 则 $\mathscr{H}_t \subset \mathscr{H}_s$, 并且

$$\|u\|_s \leqslant \|u\|_t \tag{2.1.16}$$

2)
$$|(u, v)_s| \leqslant \|u\|_s \|v\|_s \tag{2.1.17}$$

这个不等式是把 Schwarz 不等式应用到 (2.1.11) 右端的积分而推导出来的.

3) 如果 $u \in \mathscr{H}_{t+|p|}$, 则

$$\|D^p u\|_t \leqslant \|u\|_{t+|p|} \tag{2.1.18}$$

4) 如果 $u \in \mathscr{H}_{s+t}$ 而且 $v \in \mathscr{H}_{s-t}$, 则用 (2.1.11) 定义它们的数量积 $(u, v)_s$, 成立如下不等式:

$$|(u, v)_s| \leqslant \|u\|_{s+t} \|v\|_{s-t} \tag{2.1.19}$$

$$|(u, v)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\mu\|u\|_{s+t}^2 + \frac{1}{\mu}\|v\|_{s-t}^2\right) \tag{2.1.20}$$

其中 μ 是一个任意数. 不等式 (2.1.19) 有时称为广义 Schwarz 不等式.

容易看出, 如果 $s = 0$, 则空间 $\mathscr{H}_0$ 与空间 $\mathscr{L}_2(R^m)$ 重合. 如果 s 是正整数, 则 $\mathscr{H}_s$ 与 Соболев 空间 W_2^s 重合, W_2^s 由直至 s 阶广义导数属于 $\mathscr{L}_2(R^m)$ 的函数组成(参看 [125]).

定理 2.1.8 (Соболев 嵌入定理) 如果 $u \in \mathscr{H}_{l+k}(R^m)$, 其中 $2l > m$ 并且 k 是一个非负整数, 则 $u \in C^{(k)}(R^m)$.

证明 在 S 中的函数 u 满足关系

$$|D^\alpha u(x)| = (2\pi)^{-m}\left|\int \xi^\alpha \hat{u}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi\right|$$

$$\leqslant (2\pi)^{-m}\int (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|/2} |\hat{u}(\xi)| d\xi$$

因此

$$\|u(x)\|_{C^{(k)}} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x \in R^m} |D^\alpha u(x)| \leqslant C_1 \int (1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} |\hat{u}(\xi)| d\xi$$

其中常数 C_1 与 u 无关. 因为 $2l > m$, 由这个估计及 Schwarz 不等式, 推得

$$\|u(x)\|_{C^{(k)}} \leqslant C_1\left\{\int(1+|\xi|^2)^{-l}d\xi\right\}^{1/2}\left\{\int(1+|\xi|^2)^{k+l}\right.$$
$$\left.\cdot|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right\}^{1/2} \leqslant C_2\|u\|_{l+k} \tag{2.1.21}$$

如果 $u\in\mathscr{H}_{l+k}(R^m)$,则存在函数序列 $u_n\in S$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\|u-u_n\|_{l+k}\to 0$,而且当 $n,n'\to\infty$ 时，$\|u_n-u_{n'}\|_{l+k}\to 0$。从(2.1.21)推得当 $n,n'\to\infty$ 时，$\|u_n-u_{n'}\|_{C^{(k)}}\to 0$。因此存在一个函数 u',使得当 $n\to\infty$ 时 $\|u_n-u'\|_{C^{(k)}}\to 0$。显然在 R^m 内 $u\equiv u'$。

定理 2.1.9 空间 $\mathscr{H}_s$ 是关于空间 $\mathscr{H}_0$ 的数量积对偶于空间 $\mathscr{H}_{-s}$。这表示，如果 $v\in\mathscr{H}_{-s}$，则

$$l(u)=(u,v)_0=(2\pi)^{-m}\int\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$$

是 $\mathscr{H}_s$ 上的一个有界线性泛函，并且泛函 $l(u)$ 的范数等于 $\|v\|_{-s}$，即关系式

$$\|v\|_{-s}=\sup_u\frac{(u,v)_0}{\|u\|_s} \tag{2.1.22}$$

成立。

相反，在 $\mathscr{H}_s$ 上的每个有界线性泛函可以表示为形式 $(u,v)_0$，其中函数 $v\in\mathscr{H}_{-s}$ 是唯一确定的，而且泛函的范数等于 $\|v\|_{-s}$。

证明 对于 $v\in\mathscr{H}_{-s}$，$u\in\mathscr{H}_s$，我们考虑 $l(u)=(u,v)_0$。根据(2.1.19)，$|l(u)|\leqslant\|u\|_s\|v\|_{-s}$，因此 $l(u)$ 是 $\mathscr{H}_s$ 上的一个有界线性泛函。

由 $l(u)$ 的范数的定义

$$\|l\|=\sup_u\frac{(u,v)_0}{\|u\|_s} \tag{2.1.23}$$

推出

$$\|l\|=\sup_u\frac{(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)][(1+|\xi|^2)^{-s/2}\overline{\hat{v}(\xi)}]d\xi}{\left[\int(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right]^{1/2}} \tag{2.1.24}$$

利用 Schwarz 不等式，我们得到

$$\|l\| \leqslant \|v\|_{-s} \tag{2.1.25}$$

在 (2.1.23) 的右端，代替广义函数 u，其 Fourier 变换等于 $\hat{v}(\xi)\cdot(1+|\xi|^2)^{-s}$，我们得到

$$\|l\| \geqslant \|v\|_{-s} \tag{2.1.26}$$

从 (2.1.25) 和 (2.1.26) 得到 (2.1.22).

现在假设 $l(u)$ 是 $\mathscr{H}_s$ 上的一个有界线性泛函. 由 Riesz 定理，$l(u)=(u, v_1)_s$，而且 $\|l\|=\|v_1\|_s$，其中 $u, v_1\in\mathscr{H}_s$. 根据在 $\mathscr{H}_s$ 内的数量积的定义 (2.1.11)，有

$$l(u)=(2\pi)^{-m}\int(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}_1(\xi)}d\xi$$

$$=(2\pi)^{-m}\int\hat{u}(\xi)[(1+|\xi|^2)^s\overline{\hat{v}_1(\xi)}]d\xi=(u, v)_0$$

其中 v 是广义函数，其 Fourier 变换等于 $(1+|\xi|^2)^s\hat{v}_1(\xi)$. 因为 $v\in\mathscr{H}_{-s}$ 而且 $\|v\|_{-s}=\|v_1\|_s$，显然 $\|l\|=\|v_1\|_s$. 从而 $\|l\|=\|v\|_{-s}$. 因此定理证毕.

定理 2.1.10 在 $D'(R^m)$ 中的每个具紧支集的广义函数 u 对某 $s\in R^1$ 属于 $\mathscr{H}_{-s}$.

证明 令 $\phi\in C_0^\infty(R^m)$ 并且在 u 的支集上 $\phi\equiv 1$. 又设 φ 是 $C_0^\infty(R^m)$的任意函数. 那么 $u(\varphi)=u(\phi\varphi+(1-\phi)\varphi)=u(\phi\varphi)$. 因此我们需要考虑 u 只作用于 $\operatorname{supp}\varphi\subset K$ 的 $C_0^\infty(R^m)$ 中的函数 φ 上，其中 K 是 R^m 的某个紧集. 我们假设对于任意的 $s\in R^1$，u 不属于 $\mathscr{H}_{-s}$，即对于 $u\in\mathscr{H}_{-s}$(s 任意)，u 不能表示为形式 $u(\varphi)=(u, \varphi)_0$. 这表示存在函数序列 $\varphi_n\in C_0^\infty(K)$ 使得

$$|u(\varphi_n)|\geqslant n\|\varphi_n\|_n,\ n=1,2,\cdots$$

函数 $\phi_n=(n\|\varphi_n\|)^{-1}\varphi_n$ 具有包含在 K 内的支集，并且因为 $n>s$ 时 $\|\phi_n\|_s\leqslant\dfrac{1}{n}$，故对于每个 $s=1, 2, \cdots$，当 $n\to\infty$ 时，$\|\phi_n\|_s\to 0$. 从定理 2.1.8 和估计 (2.1.21) 推得 ϕ_n 及其所有导数一致收敛于0. 但 $u(\phi_n)=u(\varphi_n/n\|\varphi_n\|_n)\geqslant 1$，所以当 $n\to\infty$ 时，$u(\phi_n)$不收敛于 0. 这个矛盾表明对于某 s，$|u(\varphi)|\leqslant C\|\varphi\|_s$，即 $u\in\mathscr{H}_{-s}$.

定理 2.1.11 如果空间 $\mathscr{H}_t$ 的元素集合 $\{u_n\}$ 在某紧集 K 内有支集，而且在空间 $\mathscr{H}_t$ 的范数下一致有界，$t>s$，则此集合在 $\mathscr{H}_s$ 内是紧致的。

证明 只需要对于所有 $u_n\in C_0^\infty(K)$ 的情况证明定理 2.1.11 就够了. 事实上，对 $\mathscr{H}_t$ 中的每个 u_n，在 S 内存在一个函数 w_n 使得

$$\|u_n-w_n\|_t\leqslant\frac{1}{n}$$

假设 $\phi\in C_0^\infty(R^m)$ 并且在 K 上 $\phi\equiv 1$，则 $\phi u_n=u_n$，并且

$$\|\phi u_n-\phi w_n\|_t\leqslant C\|u_n-w_n\|_t\leqslant\frac{C}{n}\qquad(2.1.27)$$

其中 C 与 n 无关。估计 (2.1.27) 可以从下节将要证明的定理 2.2.1 推得. 如果序列 u_n 是基本序列，那么从 (2.1.27) 推得 ϕw_n 是 $\mathscr{H}_t$ 的基本序列，其逆也成立. 对元素集合 $\{\phi w_n\}$，定理 2.1.11 的假设满足：

$$\|\phi w_n\|_t\leqslant C_1,\ \text{且}\ \operatorname{supp}\phi w_n\subset K_1$$

其中 K_1 是 R^m 的有界集合. 此外 $\phi w_n\in C_0^\infty(R^m)$。

因此在证明定理时，我们可以假设 $u_n\in C_0^\infty(R^m)$，$\|u_n\|_t\leqslant C_1$ 而且 $\operatorname{supp}u_n\subset K$. 我们证明从序列 $\{u_n\}$ 中可以取出一个在 $\mathscr{H}_s$ 中的基本子序列. 假设 u_n 在 $\mathscr{H}_t$ 中是弱收敛序列，即对于 $\mathscr{H}_t$ 中的任意 v，$(u_n,v)_t\to(u,v)_t$. 我们来估计 $\|u_n-u_{n'}\|_s$. 假设 $\varepsilon>0$ 是任意的数，那么对于所有的 n 和 n'，如果 $N\geqslant N_1(\varepsilon)$，我们有

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-m}&\int_{|\xi|>N}|\hat{u}_n-\hat{u}_{n'}|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\\ &\leqslant(2\pi)^{-m}\int(1+N^2)^{s-t}|\hat{u}_n-\hat{u}_{n'}|^2(1+|\xi|^2)^t d\xi\\ &\leqslant(2\pi)^{-m}4C_1^2(1+N^2)^{s-t}<\varepsilon\qquad(2.1.28)\end{aligned}$$

设 $\{\xi^k\}$ 是在空间 $R^m(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 中使得 $|\xi^k|\leqslant N$ 的有限点集. 由于 u_n 在 $\mathscr{H}_t$ 中的弱收敛性，对于每一点 ξ^k，显然因为 $\phi(x)e^{-i\langle x,\xi^k\rangle}\in\mathscr{H}_{-t}$，序列

$$\hat{u}_n(\xi^k) = \int u_n(x) e^{-i\langle x, \xi^k\rangle} \phi(x) dx$$

当 $n \to \infty$ 时收敛，其中 $\phi \in C_0^\infty(R^m)$ 并且对于任意的 $n, u_n\phi \equiv u_n$。我们选取点 ξ^k，使得对于任意的 $\xi(|\xi| \leqslant N)$，存在一个 ξ^k 使

$$|\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_n(\xi^k)| = \left|\int u_n\phi(e^{-i\langle x,\xi\rangle} - e^{-i\langle x,\xi^k\rangle}) dx\right|$$

$$\leqslant \|u_n\|_s \|\phi(e^{-i\langle x,\xi\rangle} - e^{-i\langle x,\xi^k\rangle})\|_{-s} \leqslant \delta$$

其中 $\delta > 0$ 是将在下面选取的常数。由此推得，如果 n，n' 充分大，则对于 $|\xi| \leqslant N$，$|\hat{u}_n(\xi) - \hat{u}_{n'}(\xi)| \leqslant 3\delta$。因此，如果 n, n' 充分大，并且常数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 选取充分小，则

$$(2\pi)^{-m}\int_{|\xi|\leqslant N} |\hat{u}_n - \hat{u}_{n'}|^2(1 + |\xi|^2)^s d\xi \leqslant \varepsilon \quad (2.1.29)$$

如果 n 和 n' 充分大，从(2.1.28)和 (2.1.29) 推得 $\|u_n - u_{n'}\|_s^2 \leqslant 2\varepsilon$，即序列 u_n 在 $\mathscr{H}_s$ 中是基本序列。

定理 2.1.12 假设 $s_1 < s_2 < s_3$，那么对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $u \in \mathscr{H}_{s_3}$，不等式

$$\|u\|_{s_2}^2 \leqslant \varepsilon\|u\|_{s_3}^2 + C_\varepsilon\|u\|_{s_1}^2 \quad (2.1.30)$$

成立，其中

$$C_\varepsilon = C(s_1, s_2, s_3)\varepsilon^{-\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_2}}$$

而且 $C(s_1, s_2, s_3) = \text{const} > 0$ 依赖于 s_1, s_2 和 s_3。

证明 对于任意的 $M > 0$，我们有

$$(1 + |\xi|^2)^{s_2} = (1 + |\xi|^2)^{s_1}\left[M(1 + |\xi|^2)^{s_2 - s_1} \cdot \frac{1}{M}\right] \quad (2.1.31)$$

如果我们应用初等不等式(例如参看 [125])

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (2.1.32)$$

取值

$$a = M(1 + |\xi|^2)^{s_2 - s_1}; \quad b = \frac{1}{M}; \quad p = \frac{s_3 - s_1}{s_2 - s_1}$$

我们得到

$$M(1+|\xi|^2)^{s_2-s_1}\frac{1}{M} \leqslant \frac{1}{p} M^{\frac{s_3-s_1}{s_2-s_1}}(1+|\xi|^2)^{s_3-s_1} + \frac{1}{q} M^{-\frac{s_3-s_1}{s_3-s_2}}$$

(2.1.33)

从 (2.1.31) 和估计 (2.1.33) 推得

$$(1+|\xi|^2)^{s_2} \leqslant \varepsilon(1+|\xi|^2)^{s_3} + \frac{1}{q}(p\varepsilon)^{-\frac{s_2-s_1}{s_3-s_2}}(1+|\xi|^2)^{s_1}$$

(2.1.34)

其中，$\varepsilon = p^{-1}M^{\frac{s_3-s_2}{s_2-s_1}}$. 从 (2 1.34) 和 $\mathscr{H}_s$ 的范数的定义得到

$$\|u\|_{s_2}^2 \leqslant \varepsilon\|u\|_{s_3}^2 + \frac{1}{q}(p\varepsilon)^{-\frac{s_3-s_1}{s_3-s_2}}\|u\|_{s_1}^2$$

因此定理 2.1.12 证毕。

空间 $\mathscr{H}_s$ 广泛应用于偏微分方程问题的研究中。大量的文献致力于研究这种空间(例如参看 [56, 125, 139])。

我们用 $\mathscr{H}_s^{loc}(\Omega)$ 表示 $D'(\Omega)$ 中这样的广义函数集合：对于 $C_0^\infty(\Omega)$ 的任意 ϕ, $\phi u \in \mathscr{H}_s$.

§ 2. 拟微分算子的一些性质

下面我们将用到具有属于某特殊类型象征的拟微分算子。目前有相当大量的文献致力于研究拟微分算子的理论(参看[22,23, 53, 54, 65, 137] 等等)。为了读者的方便，我们在这里不仅介绍拟微分算子理论的新成果，同时还介绍我们需要的但已熟知的部分。

一个拟微分算子是定义在 S 类中函数 u 上的一个算子 P, 它有形式

$$Pu(x) = (2\pi)^{-m}\int p(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi \qquad (2.2.1)$$

其中，$\hat{u}(\xi)$ 是函数 $u(x)$ 的 Fourier 变换，而 $p(x,\xi)$ 是一个函数，称为算子 P 的象征。

我们假设所考虑的算子的象征满足下列条件:

a) 函数 $p(x, \xi)$ 可以表示为形式

$$p(x, \xi) = p_1(\xi) + p_2(x, \xi) \tag{2.2.2}$$

其中,$p_1(\xi)$ 是 ξ 的一个无限次可微函数,对于所有的 ξ 都有定义;而 $p_2(x, \xi)$ 是 x 和 ξ 的无限次可微函数,对于一切的 $x \in R^m$ 和 $\xi \in R^m$ 有定义,且对于每个 ξ,函数 $p_2(x, \xi)$ 作为 x 的函数具有属于某紧集 $K \subset R^m$ 的支集,即对于 $x \in R^m \backslash K$ 和 $\xi \in R^m$,$p_2(x, \xi) = 0$。

b) 存在一个 $\sigma \in R^1$,使得对于任意的多重指标 α 和 β 以及任意的 $x \in R^m$ 和 $\xi \in R^m$,估计

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} p_1(\xi)\right| \leqslant C_\alpha (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma - |\alpha|)} \tag{2.2.3}$$

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} D^\beta p_2(x, \xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma - |\alpha|)} \tag{2.2.4}$$

成立,常数 C_α 和 $C_{\alpha,\beta}$ 仅依赖于 α 和 β. 容易看到,算子 P 将 S 中的函数 u 变为函数 Pu,且仍在 S 中.

下面证明的定理 2.2.1—2.2.5,2.2.7 和 2.2.8 对于更广泛的一类象征仍然成立. 特别是,对于 $p_2(x, \xi)$ 在 S 类中是变量 x 和 ξ 的一个无限次可微函数,并且关于变量 x 对任意 k 和任意多重指标 α 和 β,$x \in R^m$ 和 $\xi \in R^m$,有

$$(1 + |x|^2)^{k/2} \left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} D^\beta p_2(x, \xi)\right| \leqslant C_{k,\alpha,\beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma - |\alpha|)} \tag{2.2.5}$$

的情况(其中常数 $C_{k,\alpha,\beta}$ 只依赖于 k, α 和 β),这些定理的证明过程不改变.

我们先证明如下的辅助命题:

引理 2.2.1 对于任意的 $s \in R^1$ 和在 R^m 中的任意 ξ 和 η,

$$(1 + |\xi|^2)^s (1 + |\eta|^2)^{-s} \leqslant 2^{|s|} (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} \tag{2.2.6}$$

证明 由不等式

$$|\xi|^2 = |\eta + (\xi - \eta)|^2 \leqslant 2|\xi - \eta|^2 + 2|\eta|^2$$

推得

$$1+|\xi|^2 \leqslant 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2)$$

用同样的方法，我们得到

$$1+|\eta|^2 \leqslant 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\xi|^2)$$

因此

$$(1+|\xi|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^{-|s|} \leqslant 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}$$
$$(1+|\eta|^2)^{|s|}(1+|\xi|^2)^{-|s|} \leqslant 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}$$

由此得到所要的不等式.

引理 2.2.2 对于任意满足 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 的 θ 和任意的 $s \in R^1$，不等式

$$(1+|\eta+\theta(\xi-\eta)|^2)^{-|s|} \leqslant 4^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{s}(1+|\eta|^2)^{-|s|} \tag{2.2.7}$$

和

$$(1+|\eta+\theta(\xi-\eta)|^2)^{s} \leqslant [(1+|\eta|^2)^{|s|}+(1+|\xi|^2)^{|s|}] \tag{2.2.8}$$

对于 R^m 中的任意 ξ 和 η 成立.

证明 如果 $|\eta-\xi| \leqslant \frac{1}{2}|\eta|$，显然

$$(1+|\eta+\theta(\xi-\eta)|^2) \geqslant 1+4^{-1}|\eta|^2.$$
$$(1+|\eta+\theta(\xi-\eta)|^2)^{-|s|} \leqslant 4^{|s|}(1+|\eta|^2)^{-|s|}$$

然而，若 $|\eta-\xi| > \frac{1}{2}|\eta|$，则

$$(1+|\eta+\theta(\xi-\eta)|^2)^{-|s|} \leqslant \frac{(1+4^{-1}|\eta|^2)^{|s|}}{(1+4^{-1}|\eta|^2)^{|s|}}$$
$$\leqslant 4^{|s|}(1+|\eta-\xi|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^{-|s|}$$

从这些不等式容易推得(2.2.7). 由于或者 $|\eta+\theta(\xi-\eta)| \leqslant |\xi|$ 或者 $|\eta+\theta(\xi-\eta)| \leqslant |\eta|$ 的事实，可以推得不等式(2.2.8).

我们用 $\hat{p}_2(\tau,\xi)$ 表示函数 $p_2(x,\xi)$ 关于变量 x 的 Fourier 变换，用 $\hat{p}_2^{(\alpha)}(\tau,\xi)$ 表示导数 $\partial^\alpha \hat{p}_2/\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_m^{\alpha_m}$.

引理 2.2.3 对于任意多重指标 α 及 $M \geqslant 0$，存在一个常数 $C_{\alpha,M}$ 使得

$$|p_2^{(\alpha)}(\tau, \xi)| \leqslant C_{\alpha,M}(1 + |\xi|^2)^{\frac{\sigma - |\alpha|}{2}}(1 + |\tau|^2)^{-M} \qquad (2.2.9)$$

证明 用分部积分变换 $p_2^{(\alpha)}$ 的积分，记住估计 (2.2.4) 和函数 $p_2(x, \xi)$ 的性质 a)，由此对于任意的 ξ, $\operatorname{supp} p_2(x, \xi) \subset K$，容易得到这个不等式.

引理 2.2.4 假设 $\int |A(\zeta)| d\zeta < \infty$. 则

$$I = \left|\iint A(\xi - \eta) a(\xi) b(\eta) d\xi d\eta\right| \leqslant \int |A(\zeta)| d\zeta \|a\|_0 \|b\|_0 \quad (2.2.10)$$

证明 由 Schwarz 不等式

$$I \leqslant \int \left\{\left(\int |A(\xi - \eta)| d\xi\right)^{1/2} \left(\int |A(\xi - \eta)| \, |a(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} |b(\eta)|\right\}$$

$$\cdot d\eta \leqslant \left(\int |A(\zeta)| d\zeta\right)^{1/2} \left(\int |b(\eta)|^2 d\eta\right)^{1/2} \left(\iint |a(\xi)|^2 |A(\xi$$

$$- \eta)| d\xi d\eta)^{1/2} \leqslant \int |A(\zeta)| d\zeta \|a\|_0 \|b\|_0$$

引理证毕。

定理 2.2.1 (关于拟微分算子的有界性)假设 Pu 是象征为$p(x, \xi)$ 的一个算子，$p(x, \xi)$ 满足条件 a) 和 b). 则对于每个 $s \in R^1$，存在依赖于 s 的一个常数 C_s，使得对于 S 内的任意函数 u，有

$$\|Pu\|_s \leqslant C_s \|u\|_{s+\sigma} \qquad (2.2.11)$$

证明 显然，$\|Pu\|_s \leqslant \|P_1 u\|_s + \|P_2 u\|_s$，其中 P_1 是象征为 $p_1(\xi)$ 的拟微分算子，P_2 是象征为 $p_2(x, \xi)$ 的拟微分算子. 根据 $\mathscr{H}_s$ 范数的定义和具有 $|\alpha| = 0$ 的条件 (2.2.3)，有

$$\|P_1 u\|_s^2 = (2\pi)^{-m} \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{P_1 u}|^2 d\xi$$

$$\leqslant C_1 \int (1 + |\xi|^2)^{s+\sigma} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant C_1 \|u\|_{s+\sigma}^2$$

(2.2.12)

现在我们来估计 $P_2 u$. 考虑函数 $P_2 u$ 的 Fourier 变换，其中 $u \in S$. 容易看到

$$\widehat{P_2 u}(\eta) = (2\pi)^{-m} \int p_2(\eta - \xi, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \qquad (2.2.13)$$

其中，$\hat{p}_2(\tau, \xi)$ 是函数 $p_2(x, \xi)$ 关于变量 x 的 Fourier 变换. 对于任意的函数 $w \in S$，由 Parseval 方程推得

$$\int P_2(u)\bar{w}dx = (2\pi)^{-2m}\iint \hat{p}_2(\eta - \xi, \xi)\overline{\hat{w}(\eta)}\hat{u}(\xi)d\xi d\eta$$

利用 (2.2.6) 和具有 $|\alpha| = 0$ 的 (2.2.9)，我们得到

$$\left|\int P_2(u)wdx\right| \leqslant (2\pi)^{-2m}\iint |\hat{p}_2(\eta - \xi, \xi)||\hat{w}(\eta)||\hat{u}(\xi)| d\xi d\eta$$

$$\leqslant C_M\iint(1 + |\eta - \xi|^2)^{-M/2}(1 + |\xi|^2)^{\frac{\sigma+s}{2}}|\hat{u}(\xi)|(1$$

$$+ |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}|\hat{w}(\eta)| d\xi d\eta \leqslant C'_M\iint(1 + |\eta - \xi|^2)^{\frac{|s|-M}{2}}(1$$

$$+|\xi|^2)^{\frac{\sigma+s}{2}}|\hat{u}(\xi)|(1 + |\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}|\hat{w}(\eta)|d\xi d\eta$$

这里选取 M，使得 $M - |s| \geqslant m + 1$. 因此利用 (2.2.10) 来估计最后的积分，我们得到

$$\left|\int P_2(u)wdx\right| \leqslant C_1\left(\int|\hat{u}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^{\sigma+s}d\xi\right)^{1/2}\left(\int|\hat{w}(\eta)|^2(1\right.$$

$$\left.+ |\eta|^2)^{-s}d\eta\right)^{1/2} \leqslant C_2\|u\|_{\sigma+s}\|w\|_{-s}$$

从最后不等式和定理 2.1.9 推得

$$\|P_2u\|_s \leqslant C_s\|u\|_{\sigma+s} \tag{2.2.14}$$

从 (2.2.12) 和 (2.2.14) 推出了定理的断言.

因为在 S 中的函数 u 的集合在 $\mathscr{H}_s$ 中稠密，所以我们看到算子 P 可以在 $\mathscr{H}_s$ 中闭化并且保持 (2.2.11) 成立.

我们注意到，这可以从定理 2.2.1 推得，特别是，如果 $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^m)$，则对于任意的 $s \in R^1$，有

$$\|\varphi u\|_s \leqslant C_s\|u\|_s \tag{2.2.15}$$

其中，$C_s = \text{const} > 0$ 且 $u \in \mathscr{H}_s$.

对于任意的算子 P，使得 (2.2.11) 形式的不等式成立的数 σ 的下限称为 P 的阶数.

定理 2.2.2 (关于拟微分算子的乘积) 假设 P 和 Q 是象征 $p(x, \xi)$ 和 $q(x, \xi)$ 的拟微分算子，而 $p(x, \xi)$ 和 $q(x, \xi)$ 分别满

足 $\sigma=\sigma_1$ 和 $\sigma=\sigma_2$ 的条件 a) 和 b). 令 $(PQ)_N$ 是象征为

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}p(x,\xi)\cdot D_x^\alpha q(x,\xi)$$

的拟微分算子. 则对于 S 中的一切 u, 有

$$P\cdot Qu=(PQ)_N u+T_N u$$

其中,算子 T_N 最多为 $\sigma_1+\sigma_2-N$ 阶,即

$$\|T_N u\|_s\leqslant C_{N,s}\|u\|_{s+\sigma_1+\sigma_2-N} \tag{2.2.16}$$

证明 因为 $Pu=P_1u+P_2u$ 而 $Qu=Q_1u+Q_2u$, 其中 P_1,P_2, Q_1,Q_2 是分别以 $p_1(\xi)$, $p_2(x,\xi)$, $q_1(\xi)$, $q_2(x,\xi)$ 为象征的拟微分算子,我们有

$$PQu=P_1Q_1u+P_2Q_1u+P_1Q_2u+P_2Q_2u$$

算子$(PQ)_N$ 的象征显然可以表示为形式

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}p(x,\xi)\cdot D^\alpha q(x,\xi)=p_1(\xi)q_1(\xi)+p_2(x,\xi)q_1(\xi)$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial\xi^\alpha}p_1(\xi)\cdot D^\alpha q_2(x,\xi)+\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}p_2\cdot D^\alpha q_2$$

因为算子 P_1Q_1 的象征等于 $p_1(\xi)q_1(\xi)$, 而且算子 P_2Q_1 的象征等于 $p_2(x,\xi)q_1(\xi)$, 由此推得

$$T_Nu=PQu-(PQ)_Nu=P_1Q_2u-(P_1Q_2)_Nu+P_2Q_2u-(P_2Q_2)_Nu$$

其中 $(P_1Q_2)_N$ 有象征

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}p_1(\xi)\cdot D^\alpha q_2(x,\xi)$$

而且 $(P_2Q_2)_N$ 有象征

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial\xi^\alpha}p_2(x,\xi)D^\alpha q_2(x,\xi)$$

因此,为了证明定理 2.2.2, 只需要证明

$$\|T'_Nu\|_s^2=\|(P_1Q_2-(P_1Q_2)_N)u\|_s^2\leqslant C'_{N,s}\|u\|^2_{s+\sigma_1+\sigma_2-N}$$

和

$$\|T''_Nu\|_s^2=\|(P_2Q_2-(P_2Q_2)_N)u\|_s^2\leqslant C''_{N,s}\|u\|^2_{s+\sigma_1+\sigma_2-N}$$

从而只需要对于算子 P 和 Q 满足 $p_1(\xi)\equiv0$ 和 $q_1(\xi)\equiv0$ 的情况

及 $P_2(x, \xi) \equiv 0$ 和 $q_1(\xi) \equiv 0$ 的情况证明定理 2.2.2. 下面我们先对 $p_1(\xi) \equiv 0$ 和 $q_1(\xi) \equiv 0$ 的情况证明定理.

考虑函数 $T''_N u = P_2Q_2u - (P_2Q_2)_N u$ 的 Fourier 变换. 根据 (2.2.13) 我们有

$$\widehat{T''_N u}(\eta) = (2\pi)^{-2m}\iint[\hat{p}_2(\eta-\tau,\tau)\hat{q}_2(\tau-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)]d\xi d\tau$$

$$-(2\pi)^{-m}\iint z(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \tag{2.2.17}$$

其中, $z(\zeta,\xi)$ 是算子 $(P_2Q_2)_N$ 的象征关于变量 x 的 Fourier 变换. 利用熟知的公式

$$\widehat{\varphi\cdot\psi} = (2\pi)^{-m}\hat{\varphi}*\hat{\psi} \tag{2.2.18}$$

其中, $*$ 象通常一样表示算子的卷积, 我们得到 $z(\zeta,\xi)$ 的表达式

$$z(\zeta,\xi) = (2\pi)^{-m}\int\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\hat{p}_2^{(\alpha)}(\zeta-\rho,\xi)\hat{q}_2(\rho,\xi)\rho^\alpha d\rho$$

变换积分变量, 令 $\rho = \tau - \xi$ 并将 z 的这个表达式代入 (2.2.17), 得到

$$\widehat{T''_N u}(\eta) = (2\pi)^{-2m}\iint\hat{q}_2(\tau-\xi,\xi)\Big[\hat{p}_2(\eta-\tau,\tau)$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\hat{p}_2^{(\alpha)}(\eta-\tau,\xi)(\tau-\xi)^\alpha\Big]\hat{u}(\xi)d\xi d\tau \tag{2.2.19}$$

对于 $|\alpha| = 0$, 按照引理 2.2.3, 我们有

$$|\hat{q}_2(\tau-\xi,\xi)| \leqslant C_M(1+|\tau-\xi|^2)^{-M/2}(1+|\xi|^2)^{\sigma_2/2} \tag{2.2.20}$$

其中 $M = \text{const} > 0$.

根据 Taylor 公式, 有

$$H(\tau,\xi,\eta) \equiv \hat{p}(\eta-\tau,\tau) - \sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\hat{p}^{(\alpha)}(\eta-\tau,\xi)(\tau-\xi)^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}\hat{p}^{(\alpha)}(\eta-\tau,\xi+\theta(\tau-\xi))(\tau-\xi)^\alpha \tag{2.2.21}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$. 利用 (2.2.19) 和 Parseval 方程, 我们得到

$$\int T''_N(u)\bar{w}dx = (2\pi)^{-m}\int \widehat{T''_N u}(\eta)\overline{\hat{w}(\eta)}d\eta$$

$$= (2\pi)^{-3m}\iiint \hat{q}_2(\tau-\xi,\xi)H(\tau,\xi,\eta)$$

$$\cdot\ \hat{u}(\xi)\overline{\hat{w}(\eta)}d\tau d\xi d\eta \tag{2.2.22}$$

其中 $u, w \in S$。从引理 2.2.3 和公式 (2.2.21)，我们有

$$|H(\tau,\xi,\eta)| \leqslant C_1(1+|\eta-\tau|^2)^{-M_1/2}(1+|\xi+\theta(\tau-\xi)|^2)^{\frac{\sigma_1-N}{2}}(1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{N}{2}}$$

其中，$M_1>0$ 是任意整数，而 C_1 依赖于 M_1，利用在引理 2.2.2 中证明了的不等式，我们得到

$$|H(\tau,\xi,\eta)| \leqslant C_2(1+|\eta-\tau|^2)^{-\frac{M_1}{2}}(1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{|\sigma_1-N|+N}{2}}$$

$$\cdot\ [(1+|\tau|^2)^{\frac{\sigma_1-N}{2}}+(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma_1-N}{2}}] \tag{2.2.23}$$

由于根据引理 2.2.1

$$(1+|\tau|^2)^{\frac{\sigma_1-N}{2}} \leqslant 2^{\frac{|\sigma_1-N|}{2}}(1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{|\sigma_1-N|}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma_1-N}{2}}$$

$$(1+|\eta-\tau|^2)^{-\frac{M_1}{2}} \leqslant 2^{\frac{M_1}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{-\frac{M_1}{2}}(1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{M_1}{2}}$$

此外，因为对于任意的 s

$$(1+|\xi|^2)^{-s/2} \leqslant 2^{|s|/2}(1+|\eta|^2)^{-s/2}(1+|\eta-\xi|^2)^{|s|/2}$$

从 (2.2.23) 推得

$$|H(\tau,\xi,\eta)| \leqslant C_3(1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{1}{2}[2|\sigma_1-N|+M_1+N]}(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma_1-N+s}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{|s|-M_1}{2}}(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} \tag{2.2.24}$$

考虑到估计 (2.2.24)，(2.2.20) 和方程 (2.2.22)，我们得到

$$\left|\int T''(u)\bar{w}dx\right| \leqslant C_4\iiint(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2-N+s)}(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\cdot\ (1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{1}{2}(2|\sigma_1-N|+M_1-M+N)}(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{|s|-M_1}{2}}$$

$$\cdot\ |\hat{u}(\xi)||\hat{w}(\eta)|d\xi d\eta d\tau \tag{2.2.25}$$

选取 M_1 使得 $-M_1+|s|\leqslant-(m+1)$，再取 M 使得不等式

$$-M+N+2|\sigma_1-N|+M_1\leqslant-(m+1)$$

成立。

容易看到，将(2.2.25)的右端对 τ 积分后，得到

$$\left|\int T''_N(u)\bar{w}dx\right| \leqslant C_5\iint(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{s}{2}-\frac{M_1}{2}}$$

$$\times(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2-N+s)}|\hat{u}(\xi)|(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\cdot|\hat{w}(\eta)|d\xi d\eta$$

把引理 2.2.4 应用到最后的积分，得到

$$\left|\int T''_N(u)\bar{w}dx\right| \leqslant C_6\|w\|_{-s}|u|_{\sigma_1+\sigma_2-N+s}$$

由此及定理 2.1.9 推得对 S 的一切 u，有

$$|T_Nu|_s \leqslant C_7|u|_{\sigma_1+\sigma_2-N+s}$$

这就是我们所要证明的。用类似的方法可以证明 $p_2(x,\xi)=0$ 和 $q_1(\xi)\equiv 0$ 情况下的定理 2.2.2。对于这种情况计算从略。我们有

$$p(x,\xi)=p(\xi) \text{ 和 } \widehat{Pu}=p(\xi)\hat{u}(\xi)$$

容易看到

$$\widehat{T'_Nu}(\eta)=(2\pi)^{-m}p(\eta)\int\hat{q}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

$$-(2\pi)^{-m}\int\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}p(\xi)}{\partial\xi^\alpha}(\eta-\xi)^\alpha\hat{q}(\eta$$

$$-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

$$(T'_Nu,w)_0=(2\pi)^{-2m}\iint\hat{q}(\eta-\xi,\xi)$$

$$\cdot\left[p(\eta)-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(\xi)(\eta-\xi)^\alpha\right]\hat{u}(\xi)\overline{\hat{w}(\eta)}d\xi d\eta \tag{2.2.26}$$

此外，可以用估计(2.2.22)的方法来估计积分(2.2.26)。利用 Taylor 公式，估计(2.2.9)和引理 2.2.1 及引理 2.2.2，我们得到

$$|(T'_Nu,w)|_0=\left|(2\pi)^{-2m}\iint\hat{q}(\eta-\xi,\xi)\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(\xi+\theta(\eta\right.$$

$$\left.-\xi))(\eta-\xi)^\alpha\hat{u}(\xi)\hat{w}(\eta)d\xi d\eta\right| \leqslant C_8\iint(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2+s-N)}(1$$

$$+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{-M+\frac{1}{2}(N+2\sigma_1-N+|s|)}$$

$\times \ |\hat{u}(\xi)|\,|\hat{w}(\eta)|\,d\xi d\eta$

选取$M>0$充分大，并且利用引理2.2.4，我们得到$|(T'_N u, w)_0| \leqslant C_9\|u\|_{\sigma_1+\sigma_2-N+s}\|w\|_{-s}$。定理证毕。

我们回顾对于任意的算子A和B的换位子符号：$[A, B] = AB - BA$。

定理 2.2.3（关于换位子） 假设P和Q是象征分别满足$\sigma=\sigma_1$及$\sigma=\sigma_2$的条件a)和b)的拟微分算子。那么

$$[P, Q]u = (PQ)_N u - (QP)_N u + T_N u \qquad (2.2.27)$$

其中T_N最多为$\sigma_1+\sigma_2-N$阶：对于$u\in S$和$s\in R^1$

$$\|T_N u\|_s \leqslant C_{s,N}\|u\|_{s+\sigma_1+\sigma_2-N}$$

定理2.2.3可以从定理2.2.2立刻推得。

如果$N=1$，从(2.2.27)得到

$$\|[P, Q]u\|_s \leqslant C_s\|u\|_{s+\sigma_1+\sigma_2-1} \qquad (2.2.28)$$

我们用$\bar{G}$表示R^m内有界集合G的闭包。

定理 2.2.4（拟局部性） 假设G_1和G_2是在R^m中的两个有界区域，$\bar{G}_1\cap G_2=\varnothing$。令函数$\varphi_1(x)\in C_0^\infty(R^m)$并且$\text{supp}\,\varphi_1\subset G_1$，而令$u$是在$C_0^\infty(R^m)$中的任意函数并且$\text{supp}\,u\subset G_2$。则对于每个$N>0$和$s\in R^1$，存在一个常数$C(N, s, G_1, G_2)$，使得

$$\|\varphi_1 Pu\|_{N+s} \leqslant C(N, s, G_1, G_2)\|u\|_s \qquad (2.2.29)$$

证明 假设$\varphi_2(x)$是$C_0^\infty(R^m)$中的一个这样的函数：在$\bar{G}_2$上$\varphi_2=1$并且$\text{supp}\,\varphi_2\cap\bar{G}_2=\varnothing$。那么$\varphi_1 Pu=\varphi_1 P\varphi_2 u$。我们来估计$\varphi_1 P\varphi_2 u$。算子$\varphi_1 P$可以看作象征为$\varphi_1(x)P(x, \xi)$的一个拟微分算子$P'$，即$\varphi_1 P\varphi_2 u\equiv P'\varphi_2 u$。再由拟微分算子的乘积定理2.2.2，我们有

$$P'\varphi_2 u = P''u + T_{N_2}u$$

其中算子P''具有象征

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N_2}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(x, \xi)\varphi_1(x)D^\alpha\varphi_2(x)$$

因为$\text{supp}\,\varphi_1\cap\text{supp}\,\varphi_2=\varnothing$，此式恒等于0。如果$N_2>N+\sigma$，其中$\sigma$是算子$P$的阶，则$T_{N_2}$最多为$-N$阶。因此$\varphi_1 P\varphi_2 u=T_{N_2}u$，

并且

$$\|\varphi_1 Pu\|_{N+s} = \|\varphi_1 P\varphi_2 u\|_{N+s} \leqslant C\|u\|_s;\ u \in C_0^\infty(G_2)$$

这就证明了定理.

我们用P^*来表示在$\mathscr{H}_0$内算子P的形式共轭算子,即对于S中的任意u,v

$$(Pu, v)_0 = (u, P^*v)_0$$

如下的定理成立.

定理 2.2.5（关于共轭算子） 假设P是一个拟微分算子,其象征满足条件a)及某σ的条件b). 令$(P^*)_N$是象征为

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} \bar{p}(x, \xi) \tag{2.2.30}$$

的拟微分算子. 则对于任意的$N \geqslant 1$

$$P^* = (P^*)_N + T_N \tag{2.2.31}$$

其中,算子T_N最多为$\sigma - N$阶,即

$$\|T_N u\|_s \leqslant C(N, s)\|u\|_{\sigma+s-N},\ u \in S \tag{2.2.32}$$

证明 因为$P = P_1 + P_2$, 其中P_1和P_2分别有象征$p_1(\xi)$和$p_2(x, \xi)$, 又因为

$$(P_1 u, v)_0 = (2\pi)^{-m}\int p_1(\xi)\hat{u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi)d\xi$$

$$= (2\pi)^{-m}\int \hat{u}(\xi)\overline{\bar{p}_1(\xi)\hat{v}(\xi)}d\xi = (u, P_1^* v)_0$$

其中P_1^*是象征为$\bar{p}_1(\xi)$的拟微分算子,由此推得只需要对于$p_1 \equiv 0$的情况证明定理2.2.5就够了. 根据$\mathscr{H}_s$中范数的定义,

$$\|T_N u\|_s = \sup_v \frac{(T_N u, v)_0}{\|v\|_{-s}},\quad v \in S$$

我们估计

$$(T_N u, v)_0 = ((P^* - (P^*)_N)u, v)_0 = (u, Pv)_0 - ((P^*)_N u, v)_0$$

利用 Parseval 方程,我们得到

$$(T_N u, v)_0 = (2\pi)^{-2m}\iint \hat{u}(\xi)\overline{\hat{p}(\xi - \eta, \eta)\hat{v}(\eta)}d\xi d\eta$$

$$- (2\pi)^{-m}\int \widehat{(P^*)_N u}(\eta)\overline{\hat{v}(\eta)}d\eta$$

显然算子$(P^*)_N$的象征关于x的 Fourier 变换等于

$$\sum_{\alpha\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\eta^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\tilde{p}(-\eta,\xi)=\sum_{\alpha\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\eta^\alpha\tilde{p}^{(\alpha)}(-\eta,\xi)$$

因此

$$(T_N u,v)_0=(2\pi)^{-2m}\iint\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\eta)}\Big[\tilde{p}(\xi-\eta,\eta)$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\tilde{p}^{(\alpha)}(\xi-\eta,\xi)(\eta-\xi)^\alpha\Big]d\xi d\eta$$

为了估计

$$H(\xi,\eta)=\tilde{p}(\xi-\eta,\eta)-\sum_{\alpha\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\tilde{p}^{(\alpha)}(\xi-\eta,\xi)(\eta-\xi)^\alpha$$

我们应用 Taylor 公式．根据引理 2.2.3 我们有不等式

$$|H(\xi,\eta)|=\Big|\sum_{\alpha=N}\frac{1}{\alpha!}\tilde{p}^{(\alpha)}(\xi-\eta,\eta+\theta(\xi-\eta))(\eta-\xi)^\alpha\Big|$$

$$\leqslant C_1(1+|\eta-\xi|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|\eta+\theta(\xi-\eta)|^2)^{\frac{\sigma-N}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{N}{2}}$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant1$．利用引理 2.2.2 的不等式 (2.2.7) 或 (2.2.8) 和不等式 (2.2.6)，我们得到

$$|H(\xi,\eta)|\leqslant C_2(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma-N}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{1}{2}(2|\sigma-N|+N-M)}$$

因此

$$|(T_N u,v)_0|\leqslant(2\pi)^{-2m}2^{2|s|}\iint|\hat{u}(\xi)||\hat{v}(\eta)|$$

$$\cdot(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}}$$

$$\cdot|H(\xi,\eta)|d\xi d\eta\leqslant C_3\iint|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma-N+s}{2}}$$

$$\cdot|\hat{v}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{1}{2}(N+2|\sigma-N|+|s|-M)}d\xi d\eta \tag{2.2.33}$$

我们选取M使得

$$(N+2|\sigma-N|+|s|-M)\leqslant-(m+1)$$

把引理 2.2.4 应用到(2.2.33)的最后积分，我们得到

$$|(T_N u,\ v)_0| \leqslant C_4\|u\|_{\sigma+s-N}\|v\|_{-s}$$

从而

$$\|T_N u\|_s \leqslant C_4\|u\|_{\sigma-N+s}$$

定理证毕。

容易看出，系数无限次可微，且在某有界区域外为常数的 m_1 阶线性微分算子 $P(x,\ D)$ 是一个拟微分算子，其象征 $p(x,\ \xi)$满足 $\sigma = m_1$ 的条件 a) 和 b)。

我们用 $E_s u$ 表示一个象征为

$$\varphi(x)(1 + |\xi|^2)^{s/2} \tag{2.2.34}$$

的拟微分算子，其中 $s \in R^1$，而函数 $\varphi(x)$ 属于 $C_0^\infty(R^m)$。显然算子 $E_s u$ 的象征满足 $\sigma = s$ 的条件 a) 和 b)。

定理 2.2.6 对于 R^m 中的任意有界区域G和 $s_1, s \in R^1$，存在常数 C(依赖于 $s,\ s_1$), N 和 G，使得对于 $C_0^\infty(G)$ 中的任意函数 u，成立不等式

$$\|u\|_{s+s_1} \leqslant \|E_s u\|_{s_1} + C\|u\|_{s+s_1-N} \tag{2.2.35}$$

其中，在 $\bar{G}_1$ 内 $\varphi(x) = 1$，$G_1 \subset \bar{G}$。

证明 令函数 $\psi(x) \in C_0^\infty(R^m)$，在 $\bar{G}$ 上 $\psi = 1$，而且在 $\operatorname{supp}\psi$ 上 $\varphi \equiv 1$。我们考虑算子

$$\pi_s = K^s - E_s$$

其中

$$K^s u = (2\pi)^{-m}\int (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

利用拟微分算子的乘积定理 2.2.2，对于 $C_0^\infty(G)$ 中的任意函数 u 得到

$$\pi_s u = \pi_s \psi u = \sum_{|\alpha| \leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\psi(\alpha)(K^{s(\alpha)} - E_s^{(\alpha)})u + T_N u$$

其中 $E_s^{(\alpha)}u$ 是象征为

$$\varphi(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi^\alpha}(1 + |\xi|^2)^{s/2}$$

的拟微分算子，$K^{s(\alpha)}u$ 是象征为 $(\partial^{|\alpha|}/\partial\xi^{\alpha})(1+|\xi|^2)^{s/2}$ 的拟微分算子，并且算子 $T_N u$ 最多为 $s-N$ 阶，即

$$\|T_N u\|_{s'} \leqslant C_N\|u\|_{s'+s-N} \quad \text{对于 } u\in S,\ s'\in R^1$$

跟通常一样，我们用 $\phi_{(\alpha)}$ 表示 $D^\alpha\phi(x)$. 因为在 $\phi(x)$ 的支集上 $\varphi(x)\equiv 1$，我们知道算子 $\phi_{(\alpha)}(K^{s(\alpha)}-E_s^{(\alpha)})u$ 的象征对于任意的多重指标 α 等于 0，从而对于 $u\in C_0^\infty(G)$，$K^s u = E_s u + T_N u$，因此

$$\|u\|_{s_1+s} \leqslant \|E_s u\|_{s_1} + C\|u\|_{s+s_1-N},\ u\in C_0^\infty(G)$$

定理 2.2.7 假设 P 和 Q 是拟微分算子，其象征满足 $\sigma=1$ 的条件 a) 和 b). 则对于任意的 $s\in R^1$ 和 $s_1\leqslant 0$，存在一个常数 $C(s, s_1)$ 使得对于 S 中的任意函数 u，有

$$\|[P, Q]u\|^2_{\frac{s_1-1}{2}+s} \leqslant C(s, s_1)\{\|Pu\|_s^2 + \|P^*u\|_s^2 + \|Qu\|^2_{s+s_1} + \|Q^*u\|^2_{s+s_1} + \|u\|_s^2\} \tag{2.2.36}$$

证明 令 $2t = 2s + s_1 - 1$. 恒等式

$$\|[P, Q]u\|_t^2 = ((PQ-QP)u,\ K^{2t}[P, Q]u)_0 \tag{2.2.37}$$

是显然的. 根据 (2.1.19) 和共轭算子的定义，

$$\begin{aligned}
&((PQ-QP)u,\ K^{2t}[P, Q]u)_0\\
&\quad\leqslant |(Qu,\ P^*K^{2t}[P, Q]u)_0| + |(Pu,\ Q^*K^{2t}[P, Q]u)_0|\\
&\quad\leqslant \|Qu\|^2_{s+s_1} + \|P^*K^{2t}[P, Q]u\|^2_{-s-s_1} + \|Pu\|_s^2\\
&\qquad + \|Q^*K^{2t}[P, Q]u\|^2_{-s}
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

由于定理 2.2.1 和 2.2.3，因为 $s_1\leqslant 0$，我们得到估计

$$\begin{aligned}
\|Q^*K^{2t}[P, Q]u\|^2_{-s} &\leqslant 2\|K^{2t}[P, Q]Q^*u\|^2_{-s} + 2\|[Q^*,\\
&\quad K^{2t}[P, Q]]u\|^2_{-s} \leqslant C_1\{\|Q^*u\|^2_{s+s_1} + \|[(Q^*)_N,\\
&\quad K^{2t}[P, Q]]u\|^2_{-s} + \|u\|^2_{s+s_1}\} \leqslant C_2\{\|Q^*u\|^2_{s+s_1} + \|u\|_s^2\}
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

用完全相同的方法，我们得到

$$\begin{aligned}
\|P^*K^{2t}[P, Q]u\|^2_{-s-s_1} &\leqslant 2\|K^{2t}[P, Q]P^*u\|^2_{-s-s_1}\\
&\quad + 2\|[P^*, K^{2t}[P, Q]]u\|^2_{-s-s_1} \leqslant C_3\{\|P^*u\|_s^2 + \|u\|_s^2\}
\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

从 (2.2.37)—(2.2.40) 得到 (2.2.36).

下面的定理是定理 2.2.7 和 2.2.5 的推论.

定理 2.2.8 假设 P 和 Q 是具有满足 $\sigma=1$ 的条件 a)和 b) 的实象征的拟微分算子. 则对于任意的 $s_1\leqslant 0$ 和任意的 $s\in R^1$, 存在一个常数 $C(s,s_1)$ 使得对于 S 中的任意函数 u,有

$$\|[P,Q]u\|^2_{s+\frac{s_1-1}{2}}\leqslant C(s,s_1)\{\|Pu\|^2_s+\|Qu\|^2_{s+s_1}+\|u\|^2_s\}$$

定理 2.2.9 假设 $p_j(x,\xi)$, $j=1,\cdots,N_1$ 是拟微分算子 P_j 的象征,满足 $\sigma=1$ 的条件 a) 和 b),并且假设对于属于闭集 $\bar{G}_1$ 的一切 x, 有

$$\sum_{j=1}^{N_1}|p_j(x,\xi)|^2+1\geqslant c_0(1+|\xi|^2),\ c_0=\text{const}>0 \quad (2.2.41)$$

则对于 $C_0^\infty(G)$ 中的任意函数 u, 有

$$\|u\|^2_{1+s}\leqslant C_s\left\{\sum_{j=1}^{N_1}\|P_ju\|^2_s+\|u\|^2_s\right\},\ s\in R^1 \qquad (2.2.42)$$

其中 $\bar{G}\subset G_1$.

证明 考虑象征为

$$p_0(x,\xi)=\phi(x)\left(\sum_{j=1}^{N_1}|p_j(x,\xi)|^2+1\right)^{1/2}$$

的拟微分算子 P_0, 其中 $\phi(x)\in C_0^\infty(G_1)$, 并且在 $\bar{G}$ 上 $\phi=1$. 我们用 P_0^{-1} 表示象征为

$$\phi(x)\left(\sum_{j=1}^{N_1}|p_j(x,\xi)|^2+1\right)^{-1/2}$$

的拟微分算子. 那么根据定理 2.2.2 有

$$P_0^{-1}P_0u=\phi^2(x)u+Tu \qquad (2.2.43)$$

其中 Tu 是一个最多为 -1 阶的算子.

因为在 $\bar{G}$ 上 $\phi(x)=1$ 并且 $u\in C_0^\infty(G)$, 从 (2.2.43) 推得

$$\|u\|^2_{1+s}\leqslant 2\|P_0^{-1}P_0u\|^2_{1+s}+2\|Tu\|^2_{1+s}\leqslant C_1\{\|P_0u\|^2_s+\|u\|^2_s\} \quad (2.2.44)$$

容易看出

$$\|P_0u\|^2_s\leqslant C_1\{\sum\|P_ju\|^2_s+\|u\|^2_s\} \qquad (2.2.45)$$

事实上

$$p_0(x,\xi)=\psi(x)\left\{\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\bar{p}_j}{\sqrt{1+\sum_k|p_k|^2}}p_j+\frac{1}{\sqrt{1+\sum_k|p_k|^2}}\right\}$$

因为象征

$$\psi(x)\bar{p}_j\left(1+\sum_{k=1}^{N_1}|p_k|^2\right)^{-1/2}$$

对应于最多为零阶的拟微分算子，而且 P_0^{-1} 最多为 -1 阶，从定理 2.2.2 我们有

$$\|P_0u\|_s^2\leqslant C_3\left\{\sum_{j=1}^{N_1}\|P_ju\|_s^2+\|T_1u\|_s^2+\|P_0^{-1}u\|_s^2\right\}$$

其中 T_1u 是一个最多为零阶的算子. 因此不等式(2.2.45)成立。从(2.2.44)和(2.2.45)推得定理的论断.

§3. 亚椭圆性的一个必要条件

具有定义在区域 $\Omega\subset R^m$ 内无限次可微系数的一个线性微分算子 P 称为在 Ω 内是亚椭圆的，如果对于 $D'(\Omega)$ 内的任意广义函数 u 和任意区域 $\Omega_1\subset\Omega$，从条件 $Pu\in C^\infty(\Omega_1)$ 可以推出 u 在 Ω_1 内无限次可微. 微分算子亚椭圆性的概念是由 Schwartz 在[120]中引入的. Hörmander 研究了常系数亚椭圆方程(参看[50, 51])及变系数亚椭圆方程(参看[52, 53, 55]). 亚椭圆方程也是论文[21, 76, 114, 122, 130, 138]的主题.

下面的定理给出对二阶线性方程亚椭圆性的一个必要条件. 对于任意阶微分算子类似的定理也成立(参看[55]).

定理 2.3.1 如果具有 $C^\infty(\Omega)$ 类的实系数 $a^{kj}(x)$, $b^k(x)$, $c(x)$ 的二阶算子

$$L(u)\equiv a^{kj}u_{x_kx_j}+b^ku_{x_k}+cu\tag{2.3.1}$$

在区域 Ω 内是亚椭圆的，则对于在 Ω 内的任意点 x 及一切 $\xi\in R^m$,

或者

$$a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geqslant 0, \text{ 或者 } a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \leqslant 0 \tag{2.3.2}$$

证明 我们用 $a(x,\xi)$ 表示 $a^{kl}(x)\xi_k\xi_l$。假设在某点 $x_0\in\Omega$ 上条件 (2.3.2) 不成立。这表示存在向量 ξ' 和 ξ'' 使得 $a(x_0,\xi')>0$ 而 $a(x_0,\xi'')<0$。那么容易看到存在一个向量 $\xi^0\neq 0$，使得

$$a(x_0,\xi^0)=0 \text{ 且 } \mathrm{grad}_\xi a(x_0,\xi^0)\neq 0 \tag{2.3.3}$$

设 Ω_1 是点 x_0 的一个这样的邻域：$\bar{\Omega}_1\subset\Omega$。令 $\{K_j, j=1,\cdots\}$ 是一系列这样的闭区域：$K_j\subset K_{j+1}$，$\Sigma_j K_j=\Omega_1$。我们用M表示定义在 Ω_1 内的函数 u 的线性空间，使得

$$u\in C^0(\Omega_1),\ Lu\in C^\infty(\Omega_1)$$

在M中我们引入半范的一个可数集合(参看[144])

$$p_{j,l}(u)=\sup_{K_j}|u|+\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sup_{K_j}|D^\alpha Lu|$$

因为由假设算子 $L(u)$ 是亚椭圆的，所以在M中的每个函数 u 在 Ω_1 内是无限次可微的。设 $T(u)$ 是将空间M嵌入到空间 $C^\infty(\Omega_1)$ 的嵌入算子，即在M中的每个函数 u 对应于同样的函数，但此时已作为 $C^\infty(\Omega_1)$ 的函数，在此 $C^\infty(\Omega_1)$ 空间中，我们引入半范系

$$q_{j,l}(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sup_{K_j}|D^\alpha u|$$

容易看到算子T的图象是封闭的。因此由关于F-空间的熟知定理(参看[144]，第二章 §6)，算子T是连续的。这表示对于空间 $C^\infty(\Omega_1)$ 的任意半范 $q_{j,l}$，存在一个半范 $p_{i,s}$ 和常数 C，使得对于M中的任意函数 u

$$q_{j,l}(Tu)\leqslant Cp_{i,s}(u) \tag{2.3.4}$$

特别是从 (2.3.4) 推得在M中的任意函数 u 满足估计

$$|\mathrm{grad}\,u(x_0)|\leqslant C\left\{\sup_{K_l}|u|+\sum_{|\alpha|\leqslant N}\sup_{K_l}|D^\alpha L(u)|\right\} \tag{2.3.5}$$

其中N是某正整数，而 K_l 是 $\{K_j\}$ 系的一个元素，$C=\mathrm{const}$。

下面我们证明，如果存在一个满足 (2.3.3) 的向量，则 (2.3.5) 是不可能的。为此我们考虑定义在 $\bar{\Omega}_1$ 中的函数

$$v = \sum_{j=0}^{N} u_j(x) t^{-j} e^{it\varphi}, \quad t = \text{const} \tag{2.3.6}$$

我们取方程 $a^{kl}\varphi_{x_k}\varphi_{x_l} = 0$，并且满足 $\text{grad}\varphi(x_0) = \xi^0$ 的一个解作为定义在 Ω_1 中的函数 φ。因为对于向量 ξ^0 条件(2.3.3)满足，众所周知(参看[101])，如果点 x_0 的邻域 Ω_1 充分小，那么这种函数 $\varphi(x)$ 存在并且属于 $C^\infty(\bar{\Omega}_1)$ 类。无限次可微函数 $u_j(j = 0, \cdots N)$ 由条件

$$L(v) = O(t^{-h}),\ D^\alpha L(v) = O(t^{-N+|\alpha|}),\ \text{当}\ t \to \infty\ \text{时} \tag{2.3.7}$$

确定。那么将 v 代入不等式(2.3.5)中，我们获得此不等式的右端对于所有充分大的 t 有界，但左端当 $t \to \infty$ 时无限地增长。这个矛盾证明了定理。

因此剩下只需证明：存在满足所求性质的函数 u_j。为此我们考察 $L(v)$，有

$$L(v) = e^{it\varphi} \sum_{j=0}^{N} t^{-j}\Big[-t^2 u_j a(x, \text{grad}\varphi)$$

$$+ t\left(-\sum_{k=1}^{m} a^{(k)}(x, \text{grad}\varphi) D_k u_j + A_j u_j\right) + B_j\Big]$$

其中 A_j 与 u_j 无关，B_j 依赖于 u_j 和它们的导数，而且 $a^{(k)}(x, \xi) = \partial a(x, \xi)/\partial \xi_k$。

我们定义 u_0 为方程

$$\sum_{k=1}^{m} a^{(k)}(x, \text{grad}\varphi) D_k u_0 - A_0 u_0 = 0$$

且满足 $u_0(x_0) = 1$ 的解。因为对于 $\xi^0 = \text{grad}\varphi(x_0)$ 有 $\text{grad}_\xi a(x_0, \xi^0) \neq 0$，由此推得，如果点 x_0 的邻域 Ω_1 充分小，则函数 u_0 存在。我们取方程

$$-\sum_{k=1}^{m} a^{(k)}(x, \text{grad}\varphi) D_k u_j + A_j u_j + B_{j-1} = 0$$

的解作为函数 u_j。此方程在点 x_0 的邻域中显然也有无限次可微

解. 因此

$$L(v) = e^{it\varphi}t^{-N}B_N$$

其中函数 B_N 与 t 无关，因此 $L(v)$ 满足所要求的条件 (2.3.7). 定理证毕.

对于任意的 m_1 阶微分算子的情况，类似的定理也成立(参看[55]). 考虑在区域 Ω 内系数无限次可微的 m_1 阶微分算子 $P(x, D)$. 我们用 $p^0(x, \xi)$ 表示算子 $P(x, D)$ 的象征的主要部分，即多项式 $p(x, \xi)$ 的所有 m_1 阶项的和. 设算子 $P(x, D)$ 的象征的主要部分 $p^0(x, \xi)$ 对于 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in R^m$ 是实的. 如果在某点 $x_0 \in \Omega$ 上，存在一个实向量 $\xi^0 \neq 0$ 使得 $p^0(x_0, \xi^0) = 0$，但对于某个 j，$\partial p^0(x_0, \xi^0)/\partial \xi_j \neq 0$，则算子 $P(x, D)$ 在区域 Ω 内不可能是亚椭圆型的.

§4. 微分算子的弱解局部光滑性的充分条件和亚椭圆性

在这一节中，我们将证明对算子 $P(x, D)$ 作用于 $C_0^\infty(\Omega)$ 类函数满足某些先验估计是算子 P 在区域 Ω 内亚椭圆性的充分条件. 如果方程的右端具有确定的光滑度，则它也是弱解光滑性的条件.

我们先证明某些辅助命题.

假定 $\chi(x) \in C_0^\infty(R^m)$ 而 $k \geqslant 0$. 又假设 $\chi(x)$ 满足

$$\hat{\chi}(\xi) = O(|\xi|^k)，当 \xi \to 0 时 \tag{2.4.1}$$

并且，若对于某些 $\xi \in R^m$ 和一切实的 t 有 $\hat{\chi}(t\xi) = 0$，则

$$\xi = 0 \tag{2.4.2}$$

我们定义 $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m}\chi(x/\varepsilon)$. 容易看出 $\hat{\chi}_\varepsilon(\xi) = \hat{\chi}(\varepsilon\xi)$.

我们引入如下的多项式符号和对应于它们的微分算子. 对于任意多重指标 α 和 β,

$$p^{(\alpha)}(x, \xi) = \frac{\partial^{|\alpha|}p(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha}, \quad p_{(\alpha)}(x, \xi) = D_x^\alpha p(x, \xi)$$

$$p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \frac{\partial^{\alpha} D_x^\beta p(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha}$$

$$p^{(j)}(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial\xi_j}p(x,\xi),\quad p_{(j)}(x,\xi)=D_j p(x,\xi),\quad j=1,\cdots,m$$

算子 $P^{(\alpha)}$, $P_{(\alpha)}$, $P^{(\alpha)}_{(\beta)}$, $P^{(j)}$, $P_{(j)}$ 由相应的多项式用向量 $(D_1,\cdots,D_m)$ 代替向量 ξ 而获得.

我们考虑如下双参数范数系:

$$\|u\|^2_{s,\gamma}=(2\pi)^{-m}\int|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s(1+|\delta\xi|^2)^{-\gamma}d\xi$$

其中 $\gamma>0$, $s\in R^1$, $\delta=\text{const}>0$. 显然这个范数等价于空间 $\mathscr{H}_{s-\gamma}$ 的范数。同样可以看出

$$\|u\|_{s,\gamma}\nearrow\|u\|_s\ (当\ \delta\searrow 0),\ 若\ u\in\mathscr{H}_s;$$

事实上,

$$|u|_s=\sup_{\delta}\|u\|_{s,\gamma}\tag{2.4.3}$$

定理 2.4.1 (参见[56]) 如果函数 χ 满足 $k>s$ 的条件(2.4.1),(2.4.2),则对于每个 $N>\gamma$,存在与 u 和 δ 无关的正常数 C_1,C_2 和 C_N,使得对于 $0<\delta\leqslant 1$ 及 $\mathscr{H}_{s+s_1-\gamma}$ 中的任意函数 u, 成立不等式

$$C_1\|u\|^2_{s_1+s,\gamma}\leqslant\int_0^1\|u*\chi_\varepsilon\|^2_{s_1}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+C_N\|u\|^2_{s+s_1-N}$$
$$\leqslant C_2\|u\|^2_{s+s_1,\gamma}\tag{2.4.4}$$

此外,对于 $\mathscr{H}_{s+s_1}$ 中的任意函数 u, 不等式

$$C_1|u|^2_{s+s_1}\leqslant\int_0^1\|u*\chi_\varepsilon\|^2_{s_1}\varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+C_N|u\|^2_{s+s_1-N}\leqslant C_2\|u\|^2_{s+s_1}\tag{2.4.5}$$

成立.

证明 根据 $\mathscr{H}_s$ 范数的定义,我们有

$$\int_0^1\|u*\chi_\varepsilon\|^2_{s_1}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=(2\pi)^{-m}\int|\hat{u}(\xi)|^2F(\xi,\delta)d\xi$$

其中

$$F(\xi,\delta)=\int_0^1(1+|\xi|^2)^{s_1}|\hat{\chi}(\varepsilon\xi)|^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\tag{2.4.6}$$

这里，我们应用了卷积的 Fourier 变换公式

$$\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi}$$

假设 $|\xi| \geqslant 1$。在积分 (2.4.6) 中我们引入新的积分变量

$$t = \varepsilon|\xi| \tag{2.4.7}$$

因此得到

$$\begin{aligned} F(\xi, \delta) &= (1+|\xi|^2)^{s_1}|\xi|^{2s}\int_0^{\infty} t^{-2s}\left|\hat{\chi}\left(t\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|^2\left(1+\frac{\delta^2|\xi|^2}{t^2}\right)^{-\gamma}\frac{dt}{t} \\ &\leqslant (1+|\xi|^2)^{s_1}|\xi|^{2s}(1+|\delta\xi|^2)^{-\gamma}\left\{\int_0^1\left|\hat{\chi}\left(t\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|^2 t^{-2s}\frac{dt}{t}\right. \\ &\quad \left.+\int_1^{\infty}\left|\hat{\chi}\left(t\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|^2 t^{2(\gamma-s)}\frac{dt}{t}\right\} \leqslant C_3(1+|\xi|^2)^{s+s_1}(1 \\ &\quad + |\delta\xi|^2)^{-\gamma} \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

因为 $\hat{\chi}$ 位于 S 类中，并且根据 (2.4.1)，对于小的 t，有

$$\left|\hat{\chi}\left(t\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right| \leqslant C_4 t^k$$

其中 $k > s$。对于 $|\xi| \leqslant 1$，由于条件 (2.4.1)，积分 (2.4.6)对于 ξ 和 δ 一致有界；因此我们可以确信存在一个常数 C_5，使得对于 $|\xi| \leqslant 1$

$$F(\xi, \delta) \leqslant C_5(1+|\xi|^2)^{s+s_1}(1+|\delta\xi|^2)^{-\gamma} \tag{2.4.9}$$

从 (2.4.8) 和 (2.4.9) 推得

$$\int_0^1 \|u * \chi_\varepsilon\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant C_6\|u\|_{s+s_1,\gamma}^2$$

为了估计当 $|\xi| \geqslant 1$ 时积分 (2.4.6) 的下界，我们再引入新变量 $t = \varepsilon|\xi|$。我们得出

$$\begin{aligned} F(\xi, \delta) &\geqslant (1+|\xi|^2)^{s_1}|\xi|^{2s}4^{-\gamma}(1+|\delta\xi|^2)^{-\gamma}\int_{1/2}^1\left|\hat{\chi}\left(t\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|^2 \\ &\quad \cdot t^{-2s}\frac{dt}{t} \geqslant C_7(1+|\xi|^2)^{s+s_1}(1+|\delta\xi|^2)^{-\gamma} \end{aligned}$$

最后这个不等式由如下的事实推得：$\hat{\chi}(t\xi/|\xi|)$是 t 的解析函数，而且由于 (2.4.2)，积分

$$\int_{1/2}^{1}\left|\hat{\chi}\left(t\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right|^{2}t^{-2s}\frac{dt}{t}$$

是 $\eta=\xi/|\xi|$ 的连续函数，并且在单位球面上对于所有的 η 为正.

此外，对于 $|\xi|\leqslant 1$ 和任意的 $N>0$，因为 $F(\xi,\delta)\geqslant 0$，所以

$$F(\xi,\delta)+(1+|\xi|^{2})^{s+s_1-N}\geqslant 2^{-N}(1+|\xi|^{2})^{s+s_1}(1+|\delta\xi|^{2})^{-r}$$

由此推得 (2.4.4) 的第一个不等式.

如果在不等式 (2.4.4) 中令 δ 趋于 0，并且利用关系 (2.4.3)，由 (2.4.4) 推得不等式 (2.4.5).

下面的引理（参看 [53]）类似于定理 2.2.2，并且可以用类似方法来证明.

引理 2.4.1 假定 $P(x,D)$ 是系数属于空间 $C_0^\infty(R^m)$ 的 m_1 阶微分算子. 令 $\chi_\varepsilon^\alpha\equiv\varepsilon^{-|\alpha|}x^\alpha\chi_\varepsilon(x)$，而 N 是正整数. 那么对于 $\mathscr{H}_{s+s_1+m_1-N+1/2}$ 中的任意函数 u，如果条件 (2.4.1) 的 k 充分大并且 $s\leqslant N-1/2$，则

$$\int_0^1\left\|P(x,D)(u*\chi_\varepsilon)-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{i^{|\alpha|}\varepsilon^{|\alpha|}}{\alpha!}(P_{(\alpha)}(x,D)u)*\chi_\varepsilon^\alpha\right\|_{s_1}^{2}\varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_N\|u\|^2_{s+s_1+m_1-N+1/2} \tag{2.4.10}$$

证明 令

$$v(x,\varepsilon)=P(x,D)(u*\chi_\varepsilon)-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{i^{|\alpha|}\varepsilon^{\alpha}}{\alpha!}(P_{(\alpha)}(x,D)u)*\chi_\varepsilon^\alpha$$

我们计算函数 v 关于 x 的 Fourier 变换，有

$$\hat{v}(\eta,\varepsilon)=(2\pi)^{-m}\int\Big[\hat{p}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)\hat{\chi}(\varepsilon\xi)$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant N-1}\frac{1}{\alpha!}\hat{p}(\eta-\xi,\xi)(\xi-\eta)^\alpha\hat{u}(\xi)\varepsilon^{|\alpha|}\hat{\chi}^{(\alpha)}(\varepsilon\eta)\Big]d\xi$$

利用 Taylor 公式得到

$$\hat{v}(\eta,\varepsilon)=(2\pi)^{-m}\int\hat{p}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)R_N(\varepsilon,\xi,\eta)d\xi$$

其中

$$R_N(\varepsilon,\xi,\eta)=\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}\varepsilon^{|\alpha|}(\xi-\eta)^{\alpha}\hat{\chi}^{(\alpha)}(\varepsilon\eta+\varepsilon\theta(\xi-\eta))$$

而 $\hat{\chi}^{(\alpha)}$ 跟通常一样表示导数 $\partial^{|\alpha|}\hat{\chi}(\xi)/\partial\xi^{\alpha}$.

根据定理 2.1.9

$$\|v\|_{s_1}=\frac{\sup(v,w)_0}{\|w\|_{-s_1}}$$

因此我们来估计 $(v,w)_0$. 由 Parseval 方程,

$$\begin{aligned}(v,w)_0&=(2\pi)^{-2m}\iint\hat{p}(\eta-\xi,\xi)\hat{u}(\xi)R_N(\varepsilon,\xi,\eta)\overline{\hat{w}(\eta)}d\xi d\eta\\&=(2\pi)^{-2m}\iint\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(s+s_1+m_1-N+1/2)}\overline{\hat{w}(\eta)}\\&\quad\cdot(1+|\eta|^2)^{-\frac{s_1}{2}}H_\varepsilon(\xi,\eta)d\xi d\eta\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

其中

$$\begin{aligned}H_\varepsilon(\xi,\eta)&=\hat{p}(\eta-\xi,\xi)(1+|\eta|^2)^{\frac{s_1}{2}}\\&\quad\cdot(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}(s+s_1+m_1-N+1/2)}R_N(\varepsilon,\xi,\eta)\end{aligned}$$

容易看出对于任意的 M, 如果 $|\xi-\eta|\leqslant|\eta|/2$, 则

$$|R_N(\varepsilon,\xi,\eta)|\leqslant C_1\varepsilon^N(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{N}{2}}(1+|\varepsilon\eta|^2)^{-M}\tag{2.4.12}$$

而且对于任意的 ξ 和 η,

$$|R_N(\varepsilon,\xi,\eta)|\leqslant C_2\varepsilon^N(1+|\xi-\eta|^2)^{N/2}\tag{2.4.13}$$

因为算子 $P(x,D)$ 的系数属于 $C_0^\infty(R^m)$ 类, 所以从引理 2.2.3 得到

$$|\hat{p}(\eta-\xi,\xi)|\leqslant C_3(1+|\xi|^2)^{\frac{m_1}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{-\frac{N_1}{2}}$$

其中 N_1 是任意正数. 令 $|\xi-\eta|\leqslant|\eta|/2$. 由于 $s-N+\frac{1}{2}\leqslant 0$, 根据 (2.4.12) 有

$$|R_N(\varepsilon,\xi,\eta)|\leqslant C_4\varepsilon^N(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{N}{2}}(\varepsilon^2+|\varepsilon\eta|^2)^{(s-N+1/2)/2}$$

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon(\xi,\eta)|&\leqslant C_5(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}(s+s_1-N+1/2)}(1+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s+s_1-N+1/2)}\\&\quad\times\varepsilon^{\frac{2s+1}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{N-N_1}{2}}\end{aligned}$$

利用引理 2.2.1,对于 $|\xi-\eta|\leqslant|\eta|/2$, 我们有

$$|H_\varepsilon(\xi,\eta)|\leqslant C_6\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{1}{2}(N-N_1+|s_1|+|s-N+1/2|)}$$

如果 $|\xi-\eta|>|\eta|/2$，则利用

$$(1+|\eta|^2)\leqslant(1+4|\xi-\eta|^2)\leqslant 4(1+|\xi-\eta|^2)$$

及不等式(2.4.13)和引理 2.2.1 所证的不等式，又因为 $\frac{1}{2}+s<N$ 而且 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$，我们有

$$|H_\varepsilon(\xi,\eta)|\leqslant C_7(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{N-N_1}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(s+s_1-N+1/2)}\varepsilon^N(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\leqslant C_8(1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{1}{2}(N-N_1+|s+s_1-N+1/2|+N-s-1/2)}\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}$$

选取 N_1 充分大使得

$$-N_1+N+|s_1|+\left|s-N+\frac{1}{2}\right|\leqslant-(m+1)$$

并且

$$2N-N_1+\left|s+s_1-N+\frac{1}{2}\right|-s\leqslant-m-\frac{1}{2}$$

则我们可以把引理 2.2.4 应用到积分(2.4.11)上去，有

$$|(v,w)_0|\leqslant C_9\|w\|_{-s_1}\|u\|_{s+s_1+m_1-N+\frac{1}{2}}\varepsilon^{s+\frac{1}{2}}$$

由此推得

$$\|u\|_s^2\leqslant C_9^2\|u\|^2_{s+s_1+m_1-N+\frac{1}{2}}\cdot\varepsilon^{2s+1}\qquad(2.4.14)$$

用 $\varepsilon^{-(2s+1)}$ 乘(2.4.14)，并且关于 ε 从 0 到 1 积分，我们获得所要求的不等式(2.4.10)。

引理 2.4.2 假设 $P(x,D)$ 是一个 m_1 阶的线性微分算子，系数属于空间 $C_0^\infty(R^m)$。则对于任意整数 $N>0$ 和 $\mathscr{H}_{s+s_1+m_1-\gamma}$ 中的任意函数 u，不等式

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N}\int_0^1\|(P_{(\alpha)}u)*\chi_\varepsilon^\alpha\|^2_{s_1}\varepsilon^{-2(s-|\alpha|)}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}C_\alpha\int_0^1\|(P_{(\alpha)}u)*\chi_\varepsilon\|^2_{s_1-|\alpha|}\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+C_{N_1}\|u\|^2_{-N_1}\qquad(2.4.15)$$

成立，其中 $s,s_1\in R^1$，而 $N_1>0$ 是任意的充分大数。

证明 根据(2.4.4)我们有

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\int_0^1\|(P_{(\alpha)}u)*\chi_\varepsilon^\alpha\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2(s-|\alpha|)}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_1\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1}\|P_{(\alpha)}u\|_{s_1+s-|\alpha|,\gamma}^2 \qquad (2.4.16)$$

这里我们把定理2.4.1应用到函数 χ_ε^α(代替 χ_ε);这是可能的,因为函数 χ^α 的 Fourier 变换等于 $i^\alpha\partial^{|\alpha|}\hat{\chi}/\partial\xi^\alpha$. 因此对于某些 k,它也满足性质(2.4.1)和(2.4.2). 再利用定理2.4.1,我们得到

$$\|P_{(\alpha)}u\|_{s_1+s-|\alpha|,\gamma}^2\leqslant C_2\int_0^1\|(P_{(\alpha)}u)*\chi_\varepsilon\|_{s_1-|\alpha|}^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+C_3\|P_{(\alpha)}u\|_{s_1+s-|\alpha|-N_0}^2 \qquad (2.4.17)$$

因为 $N_0>0$ 是一个任意数,$\|P_{(\alpha)}u\|_{s+s_1-|\alpha|-N_0}\leqslant C_4\|u\|_{-N_1}$, 而从(2.4.16)和(2.4.17)推得(2.4.15). 引理证毕.

现在我们在区域 Ω 内建立算子 $P(x,D)$ 的广义解的光滑性和算子亚椭圆性的基本定理.

这里 K 表示在 R^m 中的任意有界闭集.

定理 2.4.2 假定 P 是一个 m_1 阶线性微分算子,系数属于空间 $C_0^\infty(R^m)$, 并且满足下面条件:

I. 对于每个紧集 $K\subset\Omega$, 存在一个常数 $s_0=s_0(K)$ 使得对充分大的 $N>0$, 不等式

$$\|u\|_{s_0}^2\leqslant C(K,N)\|u\|_{-N}^2+C(K)\|Pu\|_0^2 \qquad (2.4.18)$$

成立,其中 $-N<s_0$ 而且 u 是 $C_0^\infty(K)$ 的任意函数.

II. 对于每个紧集 $K\subset\Omega$, 每个 $s\in R^1$ 和每个 $\delta_1>0$, 存在一个常数 $C(K,s,\delta_1,N)$, 使得对于充分大的 $N>0$, 不等式

$$\sum_{j=1}^m\|P_{(j)}u\|_s^2\leqslant\delta_1\|Pu\|_{s+1}^2+C(K,s,\delta_1,N)\|u\|_{-N}^2 \quad (2.4.19)$$

成立,其中 $-N<s+s_0$, $u\in C_0^\infty(K)$.

III$_a$. 对于每个紧集 $K\subset\Omega\backslash M$ (其中 M 是 Ω 内的某有界闭集), 每个 $s\in R^1$ 和每个充分大的 N, 不等式

$$\sum_{j=1}^{m} \|P^{(j)}u\|_s^2 \leqslant C(K, s)\{\|Pu\|_{s-\mu}^2 + C(N)\|u\|_{-N}^2\} \quad (2.4.20)$$

成立，其中 $\mu = \mu(K) > 0$，$-N < s + s_0$，$u \in C_0^\infty(K)$.

$\mathrm{III_b}$. 对于每个紧集 $K \subset \Omega$，每个 $s \in R^1$，每个 $\delta_1 > 0$ 和每个充分大的 $N > 0$，不等式

$$\sum_{j=1}^{m} \|P^{(j)}u\|_s^2 \leqslant \delta_1 \|Pu\|_s^2 + C(\delta_1, N, s, K)\|u\|_{-N}^2 \quad (2.4.21)$$

成立，其中 $-N < s + s_0$，$u \in C_0^\infty(K)$.

那么对于 $D'(\Omega)$ 内的任意广义函数 u（使得 $Pu \in \mathscr{H}_s^{\mathrm{loc}}(\Omega)$），我们有估计

$$\|\varphi u\|_{s+s_0}^2 \leqslant C(\varphi_1)\{\|\varphi_1 Pu\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_{\gamma_0}^2\} \quad (2.4.22)$$

其中函数 φ，$\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$，而且在 $\mathrm{supp}\varphi$ 上 $\varphi_1 = 1$，此外，或者在 M 上 $\varphi = 1$ 或者 $\mathrm{supp}\varphi \cap M = \varnothing$；$\gamma_0 = \mathrm{const} < s + s_0$.

满足条件 I—III 的微分算子 P 是全局亚椭圆的，即如果 $u \in D'(\Omega)$ 而且 $Pu \in C^\infty(\Omega)$，那么 $u \in C^\infty(\Omega)$（如果集合 M 是空的，则算子 Pu 在通常意义下显然是亚椭圆的（参看 §3））.

为了证明定理 2.4.2，我们利用下面的辅助结果.

引理 2.4.3 假设算子 P 满足定理 2.4.2 的条件 II 和 $\mathrm{III_b}$，则对于每个紧集 $K \subset \Omega$，每个 $s \in R^1$，任意的 $\delta_1 > 0$ 和每个充分大的 $N > 0$，估计

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2 \leqslant \delta_1 \|Pu\|_{s+|\beta|}^2 + C(\delta_1, s, K, N, \alpha, \beta)\|u\|_{-N}^2 \quad (2.4.23)$$

成立，其中常数 $-N < s + s_0$，函数 u 属于空间 $C_0^\infty(K)$，而且 α 和 β 是任意的多重指标.

证明 我们用归纳法证明 (2.4.23). 对于 $|\alpha| = 1$，$|\beta| = 0$ 和 $|\alpha| = 0$，$|\beta| = 1$，由于条件 II 和 $\mathrm{III_b}$，估计 (2.4.23) 成立. 令 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，$\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_j + 1, \cdots, \alpha_m)$. 我们证明，如果 (2.4.23) 对于多重指标 α 成立，则对于 α' 也成立. 事实上，由 Leibniz 公式 (2.1.1) 推得方程 $[P_{(\beta)}^{(\alpha)}, Z_j]u = P_{(\beta)}^{(\alpha')}u$，其中 Z_j 是乘上一个函数的算子，此函数在 K 内等于 x_j 而且属于集合 $C_0^\infty(R^m)$.

因此

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha')}u\|_s^2 = \|[P_{(\beta)}^{(\alpha)}, Z_j]u\|_s^2 \leqslant C_1\{\|Z_jP_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2 + \|P_{(\beta)}^{(\alpha)}Z_ju\|_s^2\} \tag{2.4.24}$$

根据 (2.2.15)，$\|Z_jP_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2 \leqslant C_2\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2$. 由归纳假设

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}Z_ju\|_s^2 + \|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2 \leqslant \delta_2\|Pu\|_{s+|\beta|}^2 + C(\delta_2, s, K, N)\|u\|_{-N}^2 + \delta_2\|PZ_ju\|_{s+|\beta|}^2$$

利用恒等式 $PZ_ju = Z_jPu + P^{(j)}u$，得到

$$\|PZ_ju\|_{s+|\beta|}^2 \leqslant C_3\{\|Pu\|_{s+|\beta|}^2 + \|P^{(j)}u\|_{s+|\beta|}^2\}$$

我们利用条件 $\mathrm{III_b}$ 的不等式 (2.4.21) 来估计最后面的项. 适当选取 δ_2，从 (2.4.24) 我们得到

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha')}u\|_s^2 \leqslant \delta_1\|Pu\|_{s+|\beta|}^2 + C(\delta_1, s, K, N, \alpha, \beta)\|u\|_{-N}^2$$

现在假设 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 而 $\beta' = (\beta_1, \cdots, \beta_j + 1, \cdots, \beta_m)$. 假设 (2.4.23) 对于 β 成立，我们证明它对于 β' 也成立. 显然，

$$\|P_{(\beta')}^{(\alpha)}u\|_s^2 = \|[P_{(\beta)}^{(\alpha)}, D_j]u\|_s^2 \leqslant C_4\{\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_{s+1}^2 + \|P_{(\beta)}^{(\alpha)}D_ju\|_s^2\} \tag{2.4.25}$$

根据归纳假设

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_{s+1}^2 + \|P_{(\beta)}^{(\alpha)}D_ju\|_s^2 \leqslant \delta_2\{\|Pu\|_{s+|\beta|+1}^2 + \|PD_ju\|_{s+|\beta|}^2\} + C_N\|u\|_{-N}^2 \tag{2.4.26}$$

因为 $PD_ju = D_jPu - P_{(j)}u$，从条件 II 我们得到

$$\|PD_ju\|_{s+|\beta|}^2 \leqslant 2(\|Pu\|_{s+|\beta|+1}^2 + \|P_{(j)}u\|_{s+|\beta|}^2) \leqslant 2\|Pu\|_{s+|\beta|+1}^2 + \delta_2\|Pu\|_{s+|\beta'|}^2 + C_N\|u\|_{-N}^2 \tag{2.4.27}$$

从估计 (2.4.25)—(2.4.27) 推得

$$\|P_{(\beta')}^{(\alpha)}u\|_s^2 \leqslant \delta_1\|Pu\|_{s+|\beta'|}^2 + C(\delta_1, N, s, K, \alpha, \beta')\|u\|_{-N}^2$$

这就是所要求的结论.

引理 2.4.4 假设微分算子 P 满足定理 2.4.2 的条件 II 和 $\mathrm{III_a}$. 那么对于每个紧集 $K\subset\Omega\backslash M$，每个 $s\in R^1$ 和每个充分大的 $N>0$，如果 $|\alpha|\geqslant 1$ 而且 $u\in C_0^\infty(K)$，则不等式

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2 \leqslant C(\alpha, \beta, s, K)\{\|Pu\|_{s+|\beta|-\mu}^2 + C(N)\|u\|_{-N}^2\} \tag{2.4.28}$$

成立.

证明 估计 (2.4.28) 可以用与引理 2.4.3 同样的方法来建立.

对于 $|\alpha|+|\beta|=1$，根据条件 III_3，(2.4.28) 成立。如果 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，$|\alpha|\geqslant 1$，而且 $\alpha'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_j+1,\cdots,\alpha_m)$，则象引理 2.4.3 的证明，我们有

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha')}u\|_s^2=\|[P_{(\beta)}^{(\alpha)},Z_j]u\|_s^2\leqslant C_1\{\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2+\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}Z_ju\|_s^2\}\quad(2.4.29)$$

由归纳假设

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_s^2+\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}Z_ju\|_s^2\leqslant C(\alpha,\beta,s,K)\{\|Pu\|_{s+|\beta|-\mu}^2$$
$$+\|PZ_ju\|_{s+|\beta|-\mu}^2+C(N)\|u\|_{-N}^2\}$$

因此，利用条件 III_2 和估计式 (2.4.29)，我们得到

$$\|P_{(\beta)}^{(\alpha')}u\|_s^2\leqslant C(\alpha',\beta,s,K)\{\|Pu\|_{s+|\beta|-\mu}^2+C(N)\|u\|_{-N}^2\}\quad(2.4.30)$$

如果 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 而且 $\beta'=(\beta_1,\cdots,\beta_j+1,\cdots,\beta_m)$，则

$$\|P_{(\beta')}^{(\alpha)}u\|_s^2=\|[P_{(\beta)}^{(\alpha)},D_j]u\|_s^2\leqslant C_2\{\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}u\|_{s+1}^2+\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}D_ju\|_s^2\}$$

利用归纳假设，方程 $PD_ju=D_jPu-P_{(j)}u$ 和条件 II，我们得到

$$\|P_{(\beta')}^{(\alpha)}u\|_s^2\leqslant C(\alpha,\beta',s,K)\{\|Pu\|_{s+|\beta'|-\mu}^2+C(N)\|u\|_{-N}^2\}$$

这个最后的不等式和 (2.4.30) 推出了所要求的不等式 (2.4.28)。

定理 2.4.2 的证明 我们首先证明对于函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega\backslash M)$，不等式 (2.4.22) 成立。假定 $\phi_j(j=0,1,\cdots)$ 是一个这样的函数族：$\phi_j\in C_0^\infty(\Omega\backslash M)$ 而且在 $\operatorname{supp}\phi_j$ 上 $\phi_{j+1}=1$，而 $\phi_0=\varphi$。

令 $v_\varepsilon=\phi_ju*\chi_\varepsilon$。因为 $u\in D'(\Omega)$ 并且 $\phi_j\in C_0^\infty(\Omega)$，由定理 2.1.10 推得，如果 $\operatorname{supp}\phi_j$ 在 $\Omega\backslash M$ 中的某固定紧集内，则对于某 $t\in R^1$ 和一切 j，函数 $\phi_ju\in\mathscr{H}_t$。

下面恒等式是显然的：

$$P(\phi_ju*\chi_\varepsilon)=(\phi_jPu)*\chi_\varepsilon+([P,\phi_j]\phi_{j+1}u)*\chi_\varepsilon$$
$$+[P(\phi_ju*\chi_\varepsilon)-(P\phi_ju)*\chi_\varepsilon]\quad(2.4.31)$$

下面我们来估计 (2.4.31) 右端的最后两项。

如果 $N>s_1+s+m_1-t+\dfrac{1}{2}$，则对于任意正数 $\gamma>s_1+s+m_1-t$，我们利用引理 2.4.1 和不等式 $(1+\delta^2/\varepsilon^2)^{-\gamma}<1$，$\gamma>0$，得到

$$\int_0^1\|P(\phi_ju*\chi_\varepsilon)-(P\phi_ju)*\chi_\varepsilon\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} C'_\alpha \int_0^1 \|(P_{(\alpha)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon^\alpha\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2(s-|\alpha|)}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$+ C_N\|\phi_j u\|_t^2 \qquad (2.4.32)$$

其中，(2.4.32)的一切积分都是有限的，这是因为 $\phi_j u \in \mathscr{H}_t$ 而且(2.4.4)成立。根据引理 2.4.2，因为 $\phi_j u \in \mathscr{H}_t$ 而且 $t > s_1 + s + m_1 - \gamma$，故有

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} \int_0^1 \|(P_{(\alpha)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon^\alpha\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2(s-|\alpha|)}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} C_\alpha \int_0^1 \|(P_{(\alpha)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C_{N_1}\|\phi_j u\|_{-N_1}^2 \qquad (2.4.33)$$

其中 $t > -N_1$，$N_1 > 0$ 是任意充分大的数．我们将引理 2.4.1 应用到算子 $P_{(\alpha)}$，并且以 $s_1 - |\alpha|$ 代替 s_1．因此我们得到

$$\int_0^1 \|(P_{(\alpha)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$\leqslant \int_0^1 \|P_{(\alpha)}(\phi_j u * \chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant N-|\alpha|-1} \int_0^1 C_\beta \|(P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon^\beta\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2(s-|\beta|)}\left(1\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \sum_{N-|\alpha|\leqslant|\beta|\leqslant N-1} \int_0^1 C_\beta \|(P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u) *$$
$$\cdot\chi_\varepsilon^\beta\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2(s-|\beta|)}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C_N^1\|\phi_j u\|_t^2 \quad (2.4.34)$$

从引理 2.4.2，因为 $\phi_j u \in \mathscr{H}_t$，而且 $t > s + s_1 + m_1 - |\alpha| - \gamma$，得到

$$\int_0^1 \|(P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon^\beta\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2(s-|\beta|)}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$\leqslant C_1\int_0^1 \|(P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon\|_{s_1-|\alpha|-|\beta|}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$+ C_{N_2}\|\phi_j u\|_{-N_2}^2 \qquad (2.4.35)$$

其中 $t > -N_2$, $N_2 > 0$ 是任何充分大的数. (2.4.34) 右端最后和式的项不超过 $C_2\|\phi_j u\|_t^2$. 事实上,根据定理 2.4.1, 有

$$\int_0^1 \|(P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon^\beta\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2(s-|\beta|)} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_3\|P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u\|_{s_1+s-|\alpha|-|\beta|,\gamma}^2$$

因为 $P_{(\alpha+\beta)}$ 的阶不大于 m_1, 而且 $|\beta| \geqslant N - |\alpha|$, 因此得到

$$\|P_{(\alpha+\beta)}\phi_j u\|_{s_1+s-|\alpha|-|\beta|,\gamma}^2 \leqslant C_4\|\phi_j u\|_{s_1+s+m_1-N,\gamma}^2 \leqslant C_5\|\phi_j u\|_t^2$$

从这些估计,并且反复应用 (2.4.34), 得到

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} \int_0^1 \|(P_{(\alpha)}\phi_j u) * \chi_\varepsilon\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_6\left[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} \int_0^1 \|P_{(\alpha)}(\phi_j u * \chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \|\phi_j u\|_t^2\right] \tag{2.4.36}$$

因此从 (2.4.32) 推得

$$\int_0^1 \|P(\phi_j u * \chi_\varepsilon) - (P\phi_j u) * \chi_\varepsilon\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_7\left[\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} \int_0^1 \|P_{(\alpha)}(\phi_j u * \chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \|\phi_j u\|_t^2\right] \tag{2.4.37}$$

我们利用引理 2.4.3 来估计 (2.4.37) 的右端,得到

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} \int_0^1 \|P_{(\alpha)}(\phi_j u * \chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\alpha|}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \delta_1 \int_0^1 \|P(\phi_j u * \chi_\varepsilon)\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C(\delta_1)\|\phi_j u\|_t^2 \tag{2.4.38}$$

从不等式 (2.4.37) 和 (2.4.38), 我们得到第一基本不等式

$$\int_0^1 \|P(\phi_j u * \chi_\varepsilon) - (P\phi_j u) * \chi_\varepsilon\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s} \left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \delta_2 \int_0 \|P(\phi_j u * \chi_\varepsilon)\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C(\delta_2)\|\phi_j u_{..}\|_t^2$$

(2.4.39)

现在我们来估计 (2.4.31) 中形式为 $([P,\phi_j]\phi_{j+1}u)*\chi_\varepsilon$ 的项。

利用 Leibniz 公式来计算 $[P,\phi_j]v$，我们得到

$$\int_0^1 \|([P,\phi_j]\phi_{j+1}u)*\chi_\varepsilon\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant \alpha \leqslant m_j} C_\alpha \int_0^1 \|(\phi_{j(\alpha)}P^{(\alpha)}\phi_{j+1}u)*\chi_\varepsilon\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \tag{2.4.40}$$

以算子 $\phi_{j(\alpha)}P^{(\alpha)}$ 代替算子 P，运用不等式 (2.4.37) 来估计最后的积分，我们得到

$$\int_0^1 \|(\phi_{j(\alpha)}P^{(\alpha)}\phi_{j+1}u)*\chi_\varepsilon\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \int_0^1 \|\phi_{j(\alpha)}P^{(\alpha)}(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+ \sum_{\substack{1\leqslant \beta \leqslant N-1-|\alpha| \\ \beta=\beta'+\beta''}} C_\beta \int_0^1 \|\phi_{j(\alpha+\beta')}P^{(\alpha)}_{(\beta'')}(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\beta|}^2 \varepsilon^{-2s}$$

$$\cdot\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C_8\|\phi_{j+1}u\|_t^2 \tag{2.4.41}$$

这里我们利用了如下的事实

$$\sum_{\substack{N-|\alpha|\leqslant |\beta|\leqslant N-1 \\ \beta=\beta'+\beta''}} \int_0^1 \|\phi_{j(\alpha+\beta')}P^{(\alpha)}_{(\beta'')}(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\beta|}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_9\|\phi_{j+1}u\|_t^2$$

为了估计 (2.4.41) 右端最后的积分，我们利用了引理 2.4.4。考虑到定理 2.2.1，我们得到

$$\sum_{\substack{1\leqslant \beta \leqslant N-1-|\alpha| \\ \beta=\beta'+\beta''}} \int_0^1 \|\phi_{j(\alpha+\beta')}P^{(\alpha)}_{(\beta'')}(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1-|\beta|}^2 \varepsilon^{-2s}\Big(1$$

$$+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\leqslant C_{10}\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant N}\sum_{1-\alpha}\int_0^1\|P_{(\beta)}^{(\alpha)}(\phi_{j+1}u*$$

$$\cdot\chi_\varepsilon)\|_{s_1-\beta}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\leqslant C_{11}\Big\{\int_0^1\|P(\phi_{j+1}u*$$

$$\cdot\chi_\varepsilon)\|_{s_1-\mu}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+C_{N_3}\|\phi_{j+1}u\|_{-N_3}^2\Big\}$$

其中 $t>-N_3$, $N_3>0$ 是任意充分大的数. 因此我们得到第二基本不等式:

$$\int_0^1\|([P,\phi_j]\phi_{j+1}u)*\chi_\varepsilon\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{12}\Big[\int_0^1\|P(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1-\mu}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+\|\phi_{j+1}u\|_t^2\Big]$$

(2.4.42)

现在我们来估计 (2.4.31) 的左端. 从估计 (2.4.39) 和 (2.4.42), 对于任意正数 $\gamma\geqslant s+s_1+m_1-t$ 和 $s_1\leqslant 0$, 因为 $\phi_j Pu\in\mathscr{H}_s$, 所以得到

$$\int_0^1\|P(\phi_j u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{13}\int_0^1\|P(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1-\mu}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+\delta_2\int_0^1\|P(\phi_j u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+C_{14}\Big[\|\phi_{j+1}u\|_t^2+\int_0^1\|(\phi_j Pu)*\chi_\varepsilon\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\Big]$$

(2.4.43)

选取 $\delta_2=\frac{1}{2}$, 从 (2.4.43) 我们得到: 对于任意的 $s\in R^1$ 和 $s_1\leqslant 0$, 有

$$\int_0^1\|P(\phi_j u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{15}\Big\{\int_0^1\|P(\phi_{j+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{s_1-\mu}^2\varepsilon^{-2s}\Big(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+\int_0^1 \|(\phi_j Pu)*\chi_\varepsilon\|_{t}^2 \varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+\|\phi_{j+1}u\|_t^2\Big\} \quad (2.4.44)$$

因为由定理 2.2.1

$$\|\phi_j u\|_t^2=\|\phi_j\phi_{j+1}u\|_t^2\leqslant C_{16}\|\phi_{j+1}u\|_t^2$$

我们连续地应用对于 $s_1=0, -\mu, -2\mu, \cdots, -l\mu$ 而且相应于 $j=0, 1, \cdots, l$ 的不等式 (2.4.44)，并且利用每个不等式去估计前一不等式右端出现的第一项. 因此我们得到

$$\int_0^1 \|P(\varphi u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{17}\Big\{\int_0^1 \|P(\phi_{l+1}u*\chi_\varepsilon)\|_{-\mu(l+1)}^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+\sum_{j=0}^{l}\int_0^1 \|(\phi_j Pu)*\chi_\varepsilon\|_{-\mu j}^2\varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+\|\phi_{l+1}u\|_t^2\Big\}$$

$$(2.4.45)$$

因为 $Pu\in\mathscr{H}_t^{loc}$，所以 (2.4.45) 右端的所有积分有限. 如果 l 充分大使得 $-\mu(l+1)+m_1+s<t$，则从 (2.4.45) 推得

$$\int_0^1 \|P(\varphi u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{18}\left\{\sum_{j=0}^{l}\|\phi_j Pu\|_t^2+\|\phi_{l+1}u\|_t^2\right\} \quad (2.4.46)$$

基于这个不等式，容易证明所要的估计 (2.4.22). 事实上，从定理 2.4.1 和估计 (2.4.18)（由于现在证明的定理的条件 I，此估计成立）推得

$$\|\varphi u\|_{s_0+s,\gamma}^2\leqslant C_{19}\|\varphi u\|_t^2+\int_0^1 \|\varphi u*\chi_\varepsilon\|_{s_0}^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{20}\left\{\|\varphi u\|_t^2+\int_0^1 \|P(\varphi u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$$

应用不等式 (2.4.46)，我们得到

$$\|\varphi u\|_{s+s_0}^2\leqslant\sup_{\delta}\|\varphi u\|_{s+s_0,\gamma}^2\leqslant C_{21}\left\{\sum_{j=0}^{l}\|\phi_j Pu\|_t^2+\|\phi_{l+1}u\|_t^2\right\}$$

$$(2.4.47)$$

我们可以假设函数组 $\{\psi\}$ 如此选取：使得 $\psi_0=\varphi$ 而 $\psi_{l+1}=\varphi_1$。常数 C_{21} 一般依赖于 t，它由函数 $u\in D'(\Omega)$ 确定。但是从 (2.4.47) 型的不等式推得：对于每个紧集 $K\subset\Omega\backslash M$，我们可以假设对于所有的 ψu 常数 t 都相同，其中 $u\in D'(\Omega)$，$Pu\in\mathscr{H}_s^{loc}$ 而且 $\psi\in C_0^\infty(K)$。我们可以选取 $t=\gamma_0<s+s_0$。因此，如果 $\mathrm{supp}\varphi\subset\Omega\backslash M$，由 (2.4.47) 得出所要求的不等式 (2.4.22)。

在 $\Omega\backslash M$ 中，不等式 (2.4.22) 给出算子 Pu 的亚椭圆性，这是因为若 $\varphi_1 Pu\in C^\infty(\Omega\backslash M)$，则根据 (2.4.22) 对于任意的 s，$\varphi u\in\mathscr{H}_s$，而且从嵌入定理 2.1.8 推得 $\varphi u\in C^\infty(\Omega\backslash M)$。

现在我们在 M 上 $\varphi\equiv 1$ 的情况下证明 (2.4.22)。

我们考虑在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中这样的函数 φ 和 φ_0：在 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 上 $\varphi_0\equiv 1$，而且在 M 的某邻域内 $\varphi\equiv 1$。

对于所考虑的函数 φ 和 φ_0，估计 (2.4.39) 和 (2.4.41) 也成立。现在由引理 2.4.3 和定理 2.2.1 得出

$$\sum_{\substack{1\leqslant|\beta|\leqslant N-1-|\alpha|\\ \beta=\beta'+\beta''}}\int_0^1\|\varphi_{(\alpha+\beta')}P^{(\alpha)}_{(\beta'')}(\varphi_0 u*\chi_\varepsilon)\|^2_{-,\beta}\,\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant\delta_1\int_0^1\|P(\varphi_0 u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}+C_{22}\|\varphi_0 u\|_t^2$$

$$\leqslant 2\delta_1\int_0^1\|P(\varphi_0 u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+2\delta_1\int_0^1\|P([\varphi_0-\varphi]u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$+C_{23}\|\varphi_0 u\|_t^2 \tag{2.4.48}$$

因为 $\varphi_0-\varphi$ 的支集在 $\Omega\backslash M$ 内，根据估计 (2.4.46)，我们有

$$\int_0^1\|P([\varphi_0-\varphi]u*\chi_\varepsilon)\|_0^2\varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\gamma}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant C_{24}\left\{\sum_{k=0}^{l}\|\psi_k Pu\|_s^2+\|\psi_{l+1}u\|_t^2\right\} \tag{2.4.49}$$

其中 $\{\psi_k\}$ 是某函数组：使得 $\psi_k\in C_0^\infty(\Omega\backslash M)$，并且在 $\mathrm{supp}\psi_k$ 上 $\psi_{k+1}=1$，而在 $\mathrm{supp}(\varphi_0-\varphi)$ 上所有的 $\psi_k=1$。如前面的情况，

我们再次考虑恒等式(2.4.31).

从这个恒等式和估计(2.4 39),(2.4.41)和(2.4.49),得到

$$\int_0^1 \|P(\varphi u * \chi_\varepsilon)\|_0^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\tau}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\leqslant \int_0^1 \|(\varphi P u) * \chi_\varepsilon\|_0^2 \varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \delta_1\int_0^1 \|P(\varphi u * \chi_\varepsilon)\|_0^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\tau}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + C_{25}\left\{\|\varphi_0 u\|_s^2 + \|\phi_{l+1} u\|_s^2 + \sum_{k=0}^{l}\|\phi_k P u\|_s^2\right\}$$

令 $\delta_1 = \dfrac{1}{2}$,我们得到

$$\int_0^1 \|P(\varphi u * \chi_\varepsilon)\|_0^2 \varepsilon^{-2s}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant C_{26}\left\{\|\varphi P u\|_s^2 + \sum_{k=0}^{l}\|\phi_k P u\|_s^2 + \|\phi_{l+1} u\|_s^2 + \|\varphi_0 u\|_s^2\right\} \tag{2.4.50}$$

根据定理的条件 I,

$$\int_0^1 \|\varphi u * \chi_\varepsilon\|_{s_0}^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\tau}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant C_{27}\left\{\int_0^1 \|P(\varphi u * \chi_\varepsilon)\|_0^2 \varepsilon^{-2s}\left(1+\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right)^{-\tau}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \|\varphi u\|_s^2\right\} \tag{2.4.51}$$

应用不等式(2.4.50)去估计(2.4.51)的右端,由此及定理 2.4.1,我们得到

$$\|\varphi u\|_{s+s_0}^2 \leqslant \sup_\delta \|\varphi u\|_{s+s_0,\tau}^2 \leqslant C_{28}\left\{\|\varphi P u\|_s^2 + \sum_{k=0}^{l}\|\phi_k P u\|_s^2 + \|\varphi_0 u\|_s^2 + \|\phi_{l+1} u\|_s^2\right\} \leqslant C_{29}\{\|\varphi_1 P u\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_s^2\} \tag{2.4.52}$$

其中 $\varphi_1\in C_0^\infty(\Omega)$，而且在集合 $\mathrm{supp}\varphi_0\cup\mathrm{supp}\phi_{l+1}$ 上 $\varphi_1=1$。

完全跟 $\mathrm{supp}\varphi_1\subset\Omega\backslash M$ 的情况所做的一样，由估计 (2.4.52) 推出 (2.4.22) 和算子 P 在集合 M 的邻域中的全局亚椭圆性。

定理证毕。

§5. Hörmander 算子的先验估计和亚椭圆性定理

在算子 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 的某些李代数条件下，Hörmander[55] 证明了形为

$$Pu=\sum_{j=1}^{r}X_j^2u+iX_0u+\gamma u \qquad (2.5.1)$$

的二阶微分算子的亚椭圆性的一个定理，其中 $X_j(x,D)=\sum_{l=1}^{m}a_j^l(x)D_l(j=0,1,\cdots,r)$。一阶微分算子 X_j 在区域 Ω 内具有实的无限次可微系数，而 γ 在 Ω 内是实的无限次可微函数。

在这一节中，我们给出 Hörmander 定理的另一种证明，并且还证明关于算子 Pu 亚椭圆性的更一般定理以及方程 $Pu=f$ 的弱解的局部光滑性定理。为此目的，我们对算子 (2.5.1) 建立一些先验估计，并且找出关于 P 可以应用定理 2.4.2 的条件。下一节将用同样的方法来研究有关具有非负特征形式的一般二阶方程的解的光滑性和亚椭圆性问题。对于某类高阶方程类似的定理也成立。因为所有的讨论都在 Ω 内的某紧集 K_1 中进行，我们可以假设 (2.5.1) 的系数属于 $C_0^\infty(\Omega)$ 类，如果必要时可以用一个函数 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$（在 K_1 上 $\varphi=1$）乘这些系数。显然 $-Pu=f$ 是一个具非负特征形式的方程。

为了简单起见，在 §5 和 §6 中我们用 (u,v) 表示 $(u,v)_0$。我们先证如下的辅助结果。

引理 2.5.1 假设 A_s 是一个拟微分算子，其象征满足 §2 的条件 a) 和 b)，其中 $\sigma=s$。那么对于每个紧集 $K\subset\Omega$，不等式

$$\|PA_su\|_{-s}^2\leqslant C(s,K)(\|Pu\|_0^2+\|u\|_0^2) \qquad (2.5.2)$$

对于 $u\in C_0^\infty(K)$ 成立；$C(s,K)$ 是一个依赖于 s 和 K 的常数。

证明 容易验证如下恒等式：

$$[P,A_s]u=\sum_{j=1}^{r}(2[X_j,A_s]X_j+[X_j,[X_j,A_s]])u$$
$$+i[X_0,A_s]u+[\gamma,A_s]u \tag{2.5.3}$$

应用换位子定理 2.2.3，不等式(2.2.28)以及拟微分算子有界性定理 2.2.1，从(2.5.3)我们看到

$$\|[P,A_s]u\|_{-s}^2\leqslant C_1\left(\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,[X_j,A_s]]u\|_{-s}^2\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,A_s]X_ju\|_{-s}^2+\|[X_0,A_s]u\|_{-s}^2$$
$$\left.+\|[\gamma,A_s]u\|_{-s}^2\right)\leqslant C_2\left(\|u\|_0^2+\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_0^2\right) \tag{2.5.4}$$

在方程

$$\mathrm{Re}(Pu,u)=\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{r}(X_j^2u,u)+i(X_0u,u)+(\gamma u,u)\right] \tag{2.5.5}$$

中，我们用分部积分变换以下积分：

$$(X_j^2u,u)=\|X_ju\|_0^2+(X_ju,(X_j^*-X_j)u),$$

$$\mathrm{Re}[i(X_0u,u)]=\mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}(X_0u,u)+\frac{i}{2}(u,X_0u)\right.$$
$$\left.+\frac{i}{2}(u,(X_0^*-X_0)u)\right]$$
$$=\mathrm{Re}\,\frac{i}{2}(u,(X_0^*-X_0)u)$$

方程(2.5.5)给出

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_0^2\leqslant|(Pu,u)|+\left|\frac{1}{2}(u,(X_0^*-X_0)u)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{r}|(X_j u,(X_j^*-X_j)u)|+|(\gamma u,u)| \tag{2.5.6}$$

从这里我们得到

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_0^2\leqslant C_3(\|Pu\|_0^2+\|u\|_0^2)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_0^2$$

由此推出

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_0^2\leqslant C_4(\|Pu\|_0^2+\|u\|_0^2) \tag{2.5.7}$$

由估计 (2.5.4) 和 (2.5.7) 得出

$$\|PA_s u\|_{-s}^2\leqslant 2\|A_s Pu\|_{-s}^2+2\|[P,A_s]u\|_{-s}^2\leqslant C_5(\|Pu\|_0^2+\|u\|_0^2)$$

引理证毕.

注 对于形式为 $A_s=A_{s,N}+T_N$ 的算子 A_s, 引理 2.5.1 显然也成立. 其中 $A_{s,N}$ 是一个阶数最多为 s 的拟微分算子, T_N 是一个阶数最多为 $-N$ 的算子,这里$N>0$是一个充分大的数.

定理 2.5.1 (能量估计) 对于任意的函数 $u\in C_0^\infty(K)$ 和任意的 $s\geqslant 0$,有

$$\|X_0 u\|_{s-\frac{1}{2}}^2+\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_s^2\leqslant C(K,s)\{\|Pu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2\} \tag{2.5.8}$$

证明 我们注意到对于 $s\geqslant 1$ 不等式(2.5.8)是显然的. 令 E_s 是象征由公式(2.2.34)定义的拟微分算子,其中函数 $\varphi\in C_0^\infty(K_1)$, 而且在 K 上 $\varphi\equiv 1$, $K\subset K_1$. 我们来研究 $\mathrm{Re}(PE_s u, E_s u)$, 用变换 (2.5.5) 的同样方法变换此表达式,我们得到

$$\mathrm{Re}(PE_s u,E_s u)=\sum_{j=1}^{r}(X_j E_s u,X_j E_s u)+(\gamma E_s u,E_s u)$$
$$+\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{r}(X_j E_s u,(X_j^*-X_j)E_s u)\right.$$
$$\left.+\frac{i}{2}(E_s u,(X_0^*-X_0)E_s u)\right\} \tag{2.5.9}$$

由关于算子 E_s 的定理 2.2.6,对于每个函数 $u\in C_0^\infty(K)$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2\leqslant 2\sum_{j=1}^{r}\|E_sX_ju\|_0^2+C_1\|u\|_0^2$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{r}4(\|X_jE_su\|_0^2+\|[E_s,\ X_j]u\|_0^2)+C_1\|u\|_0^2$$

由换位子 $[E_s,\ X_j]$ 的范数的估计(2.2.28),我们得到

$$\|[E_s,\ X_j]u\|_0^2\leqslant C_2\|u\|_s^2$$

因此

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2\leqslant C_3\left(\sum_{j=1}^{r}\|X_jE_su\|_0^2+\|u\|_s^2\right)\tag{2.5.10}$$

现在我们利用(2.5.9)来估计 X_jE_su 的范数. 应用拟微分算子的阶的定理 2.2.1 及不等式(2.1.19), 得到

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_jE_su\|_0^2\leqslant|(PE_su,\ E_su)|+\sum_{j=1}^{r}|(X_jE_su,(X_j^*-X_j)E_su)|$$

$$+\frac{1}{2}|(E_su,\ (X_0^*-X_0)E_su)|+C_4\|u\|_s^2$$

$$\leqslant 2\|PE_su\|_{-s}^2+C_5\|u\|_{2s}^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\|X_jE_su\|_0^2\tag{2.5.11}$$

根据引理 2.5.1, 我们有

$$\|PE_su\|_{-s}^2\leqslant C_6(\|Pu\|_0^2+\|u\|_0^2)\tag{2.5.12}$$

从不等式(2.5.10)—(2.5.12), 我们得出结论

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2\leqslant C_7(\|Pu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2)\tag{2.5.13}$$

为了估计 $\|X_0u\|_{s-\frac{1}{2}}^2$, 我们考虑 $(PE_su,\ E_{-\frac{1}{2}}^*X_0E_su)$. 这里, E_s^* 是共轭于 E_s 的算子. 显然

$$(PE_su,\ E_{-\frac{1}{2}}^*E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)=i\|E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su\|_0^2$$

$$+(\gamma E_su,\ E_{-\frac{1}{2}}^*E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}(X_jE_su,\ X_j^*E_{-\frac{1}{2}}^*E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)\tag{2.5.14}$$

应用 (2.1.19) 和拟微分算子的阶的定理 2.2.1，我们得到估计

$$
\begin{aligned}
|(PE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)| &\leqslant 2\|PE_su\|^2_{-s}+C_8\|u\|^2_{2s}\\
&\leqslant C_9(\|Pu\|^2_0+\|u\|^2_{2s}) \qquad (2.5.15)
\end{aligned}
$$

这里，我们还利用了 (2.5.12). 容易看到

$$|(\gamma E_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)|\leqslant C_{10}\|u\|^2_s$$

再利用不等式 (2.1.19)，定理 2.2.1 和 2.2.3，得到

$$|(X_jE_su,\ X_j^*E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)|\leqslant\|X_jE_su\|^2_0+\|X_j^*E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su\|^2_0$$

以及不等式

$$\|X_jE_su\|^2_0\leqslant C_{11}(\|X_ju\|^2_s+\|u\|^2_s)$$

和估计

$$
\begin{aligned}
\|X_j^*E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su\|^2_0&\leqslant C_{12}(\|E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_sX_ju\|^2_0+\|u\|^2_s)\\
&\leqslant C_{13}(\|X_ju\|^2_s+\|u\|^2_s)
\end{aligned}
$$

由此推得

$$|(X_jE_su,\ X_j^*E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su)|\leqslant C_{14}(\|X_ju\|^2_s+\|u\|^2_s)$$

因此从 (2.5.14)，我们有

$$\|E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su\|^2_0\leqslant C_{15}\left\{\|Pu\|^2_0+\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|^2_s+\|u\|^2_{2s}\right\} \qquad (2.5.16)$$

由定理 2.2.6，对于任意的函数 $u\in C_0^\infty(K)$，我们得到不等式

$$
\begin{aligned}
\|X_0u\|^2_{s-\frac{1}{2}}&\leqslant 2\|E_sX_0u\|^2_{-\frac{1}{2}}+C_{16}\|u\|^2_0\leqslant 4\|E_{-\frac{1}{2}}E_sX_0u\|^2_0+C_{17}\|u\|^2_0\\
&\leqslant C_{18}\{\|E_{-\frac{1}{2}}X_0E_su\|^2_0+\|E_{-\frac{1}{2}}[X_0,E_s]u\|^2_0+\|u\|^2_0\}
\end{aligned}
$$

在估计最后这个不等式的右端时，我们利用 (2.5.16) 和换位子定理 2.2.3，得到

$$\|X_0u\|^2_{s-\frac{1}{2}}\leqslant C_{19}(\|Pu\|^2_0+\|u\|^2_{2s}) \qquad (2.5.17)$$

从先验估计 (2.5.13) 和 (2.5.17) 推得所要的结果. 定理证毕.

我们考虑由 (2.5.1) 定义的算子组 $\{X_0,\cdots,X_r\}$. 对于任意的多重指标 $I=(\alpha_1,\ \cdots,\alpha_t)$，其中 $\alpha_l=0,\ 1,\ \cdots,\ r(l=1,\ \cdots,t)$，我们假设 $|I|=\sum_{l=1}^t\lambda_l$，其中如果 $\alpha_l=1,\cdots,r$，则 $\lambda_l=1$，如果 $\alpha_l=0$，则 $\lambda_l=2$. 对于每个多重指标，我们考虑算子

$$X_I=\mathrm{ad}X_{\alpha_1}\cdots\mathrm{ad}X_{\alpha_{t-1}}X_{\alpha_t}$$

其中，对任意的算子 A 和 B，$\mathrm{ad}AB=[A,B]=AB-BA$。下面的引理给出关于算子 X_I 的范数的估计。

引理 2.5.2 对于每个紧集 K，每个整数 $k\geqslant 1$ 以及每个 $s\geqslant 0$，存在一个常数 $C(K,s,k)$，使得对于 $C_0^\infty(K)$ 中的每个函数 u，不等式

$$\sum_{|I|=k}\|X_Iu\|^2_{s+2^{1-k}-1}\leqslant C(K,s,k)\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2^k s}\} \tag{2.5.18}$$

成立。

证明 关于 k 我们用归纳法证明 (2.5.18)。对于 $k\leqslant 2$，从 (2.5.17)，(2.5.13) 和定理 2.2.7 推得这个不等式，根据定理 2.2.7，有

$$\sum_{j,l=1}^{r}\|[X_j,X_l]u\|^2_{s-\frac{1}{2}}\leqslant C_1\left\{\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2+\|u\|_s^2\right\}$$
$$\leqslant C_2\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2s}\}$$

现在我们假设对于所有的 $k\leqslant k_0$，(2.5.18) 成立，并证明它对于 $k=k_0+1$ 也成立。可能有两种情况：

1) $X_I=[X_j,X_{I_1}]$，其中 $|I|=k_0+1$，而 $|I_1|=k_0$；$j=1,\cdots,r$，

2) $X_I=[X_0,X_{I_0}]$，其中 $|I|=k_0+1$ 而 $|I_0|=k_0-1$。

为了估计在第一种情况中 X_Iu 的范数，我们应用 $P=X_j$，$Q=X_{I_1}$ 和 $s_1=2^{1-k_0}-1$ 的不等式 (2.2.36)，得到

$$\sum_{|I_1|=k_0}\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,X_{I_1}]u\|^2_{s-\frac{1}{2}+(2^{-k_0}-\frac{1}{2})}$$
$$\leqslant C_3\left\{\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2+\sum_{|I_1|=k_0}\|X_{I_1}u\|^2_{s+2^{1-k_0}-1}+\|u\|_s^2\right\}$$

由估计 (2.5.13) 和归纳法假设得出

$$\sum_{|I_1|=k_0}\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,X_{I_1}]u\|^2_{s+2^{-k_0}-1}\leqslant C_4\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{k_0}s}\} \tag{2.5.19}$$

现在我们要得出对于算子 $X_I=[X_0,X_{I_0}]$，$|I_0|=k_0-1$ 情

况的估计(2.5 18). 我们记 $2^{-k_0}-1$ 为 ρ. 容易看到

$$[P, X_{l_0}]u=\sum_{j=1}^{r}(2X_j[X_j, X_{l_0}]u-[X_j,[X_j,X_{l_0}]]u)$$
$$+i[X_0, X_{l_0}]u+[\gamma, X_{l_0}]u$$

在此方程中,我们用 $E_s u$ 代替 u,并且在空间 $\mathscr{H}_0$ 中取所得方程与 $E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u$ 的数量积. 因此我们有

$$([P, X_{l_0}]E_s u, E_\rho^* E_\rho[X_0,X_{l_0}]E_s u)=i\|E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u\|_0^2$$
$$+([\gamma, X_{l_0}]E_s u, E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\{2([X_j, X_{l_0}]E_s u, X_j^* E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)$$
$$-(E_\rho[X_j, [X_j,X_{l_0}]]E_s u, E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)\} \quad (2.5.20)$$

由此方程得出关于 $\|E_\rho[X_0,X_{l_0}]E_s u\|_0^2$ 的估计.我们估计在(2.5.20)中剩下的项,有

$$V_1\equiv|([\gamma, X_{l_0}]E_s u, E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)|$$
$$\leqslant\|[\gamma, X_{l_0}]E_s u\|_0^2+\|E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u\|_0^2$$

应用拟微分算子的阶的定理 2.2.1, 因为 $2^{1-k_0}-1\leqslant 0$, 我们得到

$$V_1\leqslant C_5\{\|u\|_s^2+\|u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2\}\leqslant C_6\|u\|_s^2$$

此外,由 Schwarz 不等式(2 1.19),我们有

$$V_2\equiv\sum_{j=1}^{r}|([X_j, X_{l_0}]E_s u, X_j^* E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)|$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{r}\{\|[X_j,X_{l_0}]E_s u\|_{2^{1-k_0}-1}^2+\|X_j^* E_\rho^* E_\rho[X_0,X_{l_0}]E_s u\|_{1-2^{1-k_0}}^2\}$$
$$\leqslant C_7\sum_{j=1}^{r}\{\|[X_j, X_{l_0}]u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2+\|[[X_j, X_{l_0}], E_s]u\|_{2^{1-k_0}-1}^2$$
$$+\|X_j^* u\|_s^2+\|[X_j^*, E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s]u\|_{1-2^{1-k_0}}^2\}$$

利用定理 2.2.1 和估计(2.5.13), 得到

$$V_2\leqslant C_8\left\{\sum_{j=1}^{r}\|[X_j, X_{l_0}]u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2+\|Pu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2\right\}$$

容易看到

$$V_3 = \sum_{j=1}^{r} |(E_\rho[X_j,[X_j, X_{l_0}]]E_s u,\ E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)|$$

$$\leqslant r^\delta \|E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s u\|_0^2 + \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{r} \|E_\rho[X_j,[X_j,\ X_{l_0}]]E_s u\|_0^2$$

其中 $\delta > 0$ 是任意常数. 对于此不等式的最末项,估计

$$\sum_{j=1}^{r} \|E_\rho[X_j,\ [X_j,\ X_{l_0}]]E_s u\|_0^2$$

$$\leqslant C_9 \sum_{j=1}^{r} \{\|[X_j,\ [X_j,\ X_{l_0}]]u\|_{s+2^{-k_0-1}}^2$$

$$+ \|E_\rho[[X_j,\ [X_j,\ X_{l_0}]],\ E_s]u\|_0^2\}$$

$$\leqslant C_{10} \sum_{j=1}^{r} \{\|u\|_{s+2^{-k_0-1}}^2 + \|[X_j,\ [X_j,\ X_{l_0}]]u\|_{s+2^{-k_0-1}}^2\}$$

成立. 因此

$$V_3 \leqslant r^\delta \|E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u\|_0^2 + C_8\{\|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^{r} \|[X_j,\ [X_j,$$

$$X_{l_0}]]u\|_{s+2^{-k_0-1}}^2\}$$

为了估计表达式

$$V_4 = ([P,\ X_{l_0}]E_s u,\ E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s u)$$

我们将它表示为形式 $V_4 = V_5 + V_6$, 其中

$$V_5 = (X_{l_0}E_s u,\ P^* E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s u)$$

$$V_6 = -(PE_s u,\ X_{l_0}^* E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s u)$$

利用 Schwarz 不等式,得到

$$|V_6| \leqslant \|PE_s u\|_{-s}^2 + \|X_{l_0}^* E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s u\|_s^2$$

我们利用 (2.5.12) 估计此不等式右端的第一项,而第二项不超过

$$3\{\|E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s X_{l_0} u\|_s^2 + \|E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s(X_{l_0}^* - X_{l_0})u\|_s^2$$

$$+ \|[X_{l_0}^*,\ E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{l_0}]E_s]u\|_s^2$$

回顾定理 2.2.1 和 2.2.3,对于 $k_0 \geqslant 1$, $2^{1-k_0} - 1 \leqslant 0$, 我们得到

$$|V_6| \leqslant C_{11}(\|Pu\|_0^2 + \|X_{l_0}u\|_{2s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|u\|_{2s}^2)$$

为了估计 $|V_5|$，我们利用对于算子 P^* 的如下表达式：

$$P^*v = -Pv + \sum_{j=1}^{r}(2X_j^2 + \beta_j X_j)v + \beta_0 v$$

其中 β_j 和 β_0 是某函数。容易看到

$$\begin{aligned}|V_5| \leqslant &|(X_{l_0}E_s u, -PE_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)| \\ &+ \sum_{j=1}^{r}\{|(X_{l_0}E_s u, 2X_j^2 E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)| \\ &+ |(X_{l_0}E_s u, \beta_j X_j E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)|\} \\ &+ |(X_{l_0}E_s u, \beta_0 E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)| \qquad (2.5.21)\end{aligned}$$

我们来估计 (2.5.21) 右端的数量积。根据 (2.1.19)，我们有

$$\begin{aligned}W_1 &= |(X_{l_0}E_s u, PE_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)| \\ &\leqslant \|X_{l_0}E_s u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|PE_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u\|_{1-s-2^{1-k_0}}^2\end{aligned}$$

因为算子 $E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s$ 最多为 $s-1+2^{1-k_0}$ 阶，由引理 2.5.1 及其注，定理 2.2.1 和 2.2.3 推得

$$W_1 \leqslant C_{12}\{\|Pu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2 + \|X_{l_0}u\|_{2s+2^{1-k_0}-1}^2\}$$

这里我们利用了对于 $k_0 \geqslant 1$ 有 $2^{1-k_0} - 1 \leqslant 0$ 的事实。

进一步利用不等式 (2.1.19) 及定理 2.2.1 和 2.2.3，我们得到

$$\begin{aligned}W_2 &= \sum_{j=1}^{r}|(X_{l_0}E_s u, \beta_j X_j E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u)| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{r}\{\|X_{l_0}E_s u\|_{2^{1-k_0}-1}^2 + \|\beta_j X_j E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s u\|_{1-2^{1-k_0}}^2\} \\ &\leqslant C_{13}\{\|X_{l_0}u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 + \sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_s^2 + \|[X_{l_0}, E_s]u\|_{2^{1-k_0}-1}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r}\|\beta_j[X_j, E_\rho^* E_\rho[X_0, X_{l_0}]E_s]u\|_{1-2^{1-k_0}}^2\}\end{aligned}$$

由这个不等式和估计 (2.5.13)，得到

$$W_2 \leqslant C_{14}\{\|X_{l_0}u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|Pu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2\}$$

用同样的方法可以得到

$$W_3 \equiv |(X_{I_0}E_s u,\ \beta E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{I_0}]E_s u)|$$
$$\leqslant C_{15}\{\|X_{I_0}u\|^2_{s+2^{1-k_{0-1}}} + \|u\|_s^2\}$$

我们进一步估计

$$W_4 \equiv \sum_{j=1}^{r} |(X_j^* X_{I_0} E_s u,\ X_j E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{I_0}]E_s u)|$$

由 Schwarz 不等式(2.1.19)，得

$$W_4 \leqslant \sum_{j=1}^{r} \{\|X_j^* X_{I_0} E_s u\|^2_{2^{1-k_{0-1}}} + \|X_j E_\rho^* E_\rho[X_0,\ X_{I_0}]E_s u\|^2_{-2^{1-k_0}}\}$$

$$\leqslant C_{16} \sum_{j=1}^{r} \{\|X_j u\|_s^2 + \|u\|_s^2 + \|X_j^* X_{I_0} E_s u\|^2_{2^{1-k_{0-1}}}\} \quad (2.5.22)$$

为了估计

$$W_5 \equiv \sum_{j=1}^{r} \|X_j^* X_{I_0} E_s u\|^2_{2^{1-k_{0-1}}}$$

我们先求对于 $\Sigma_1^r \|X_j X_{I_0} E_{2^{1-k_{0-1}}} E_s u\|_0^2$ 的估计．在方程(2.5.9)中以函数 $v = X_{I_0} E_{2^{1-k_{0-1}}} E_s u$ 代替 $E_s u$，得到

$$\sum_{j=1}^{r} \|X_j v\|_0^2 \leqslant C_{17}\{|(Pv,\ v)| + \|v\|_0^2\} \qquad (2.5.23)$$

由此推得

$$\sum_{j=1}^{r} \|X_j v\|_0^2 \leqslant C_{18}\{\|X_{I_0}u\|^2_{s+2^{1-k_{0-1}}} + \|Pv\|^2_{-s-2^{1-k_0}} + \|u\|_s^2 + \|v\|^2_{s+2^{1-k_0}}\}$$
$$(2.5.24)$$

我们利用引理 2.5.1 来估计 $\|Pv\|^2_{-s-2^{1-k_0}}$。容易看到

$$\|v\|^2_{s+2^{1-k_0}} \leqslant C_{19}\{\|X_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_{0-1}}} + \|u\|^2_{2s+2^{2-k_{0-1}}}\} \quad (2.5.25)$$

因为对于 $k_0 \geqslant 2$ 有 $2^{2-k_0} - 1 \leqslant 0$，并且 $s \geqslant 0$，我们从(2.5.24)和(2.5.25)，得到估计

$$\sum_{j=1}^{r} \|X_j v\|_0^2 \leqslant C_{20}\{\|X_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_{0-1}}} + \|Pu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2\} \ (2.5.26)$$

这里我们还利用了不等式

$$\|u\|_\mu^2 \leqslant \|u\|_l^2, \ \mu \leqslant l \tag{2.5.27}$$

因此利用定理 2.2.6 和定理 2.2.3，对于任意函数 $u \in C_0^\infty(K)$，$K \subset K_1$，得到不等式

$$\begin{aligned} W_5 &\leqslant 2 \sum_{j=1}^{r} \|E_{2^{1-k_0}-1} X_j^* X_{l_0} E_s u\|_0^2 + C_{21}\|u\|_0^2 \\ &\leqslant 4 \sum_{j=1}^{r} \|X_j X_{l_0} E_{2^{1-k_0}-1} E_s u\|_0^2 + C_{22}\{\|X_{l_0} u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|u\|_0^2\} \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

考虑到对于 $k_0 \geqslant 1$ 有 $2^{1-k_0} - 1 \leqslant 0$ 而且 $s \geqslant 0$，我们得到

$$W_5 \leqslant C_{25}\left\{\sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_0^2 + \|X_{l_0} u\|_{s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_s^2\right\} \tag{2.5.29}$$

回顾 (2.5.22)，(2.5.29)，(2.5.13) 和 (2.5.26)，最后我们得到对于 W_4 的如下关系式：

$$W_4 \leqslant C_{24}\{\|Pu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2 + \|X_{l_0} u\|_{2s+2^{1-k_0}-1}^2\} \tag{2.5.30}$$

因此

$$\begin{aligned} |V_5| \leqslant W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \leqslant C_{25}\{&\|Pu\|_0^2 \\ &+ \|X_{l_0} u\|_{2s+2^{1-k_0}-1}^2 + \|u\|_{2s}^2\} \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

此外，从 (2.5.20) 得到关系式

$$\|E_\rho [X_0, X_{l_0}] E_s u\|_0^2 \leqslant V_1 + V_2 + V_3 + |V_5| + |V_6| \tag{2.5.32}$$

由定理 2.2.6，我们有

$$\begin{aligned} \|[X_0, X_{l_0}] u\|_{s+2^{-k_0}-1}^2 &\leqslant 2\|E_\rho E_s [X_0, X_{l_0}] u\|_0^2 + C_{26}\|u\|_0^2 \\ &\leqslant 4\|E_\rho [X_0, X_{l_0}] E_s u\|_0^2 + C_{27}\{\|E_\rho [E_s, [X_0, X_{l_0}]] u\|_0^2 + \|u\|_0^2\} \\ &\leqslant 4\|E_\rho [X_0, X_{l_0}] E_s u\|_0^2 + C_{28}\|u\|_s^2 \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

因此，考虑到 (2.5.33) 和 (2.5.32)，得到

$$\|[X_0, X_{l_0}] u\|_{s+2^{-k_0}-1}^2 \leqslant C_{29}\{\|Pu\|_0^2 + C(\delta)\|u\|_{2s}^2$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,\ X_{I_0}]u\|^2_{s+2^{1-k_0-1}}+\|X_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_0-1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{r}C(\delta)\|[X_j,[X_j,X_{I_0}]]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}$$

$$+\delta\|E_\rho[X_0,X_{I_0}]E_s u\|_0^2\} \tag{2.5.34}$$

其中 $\delta>0$ 是一个任意正数,而 C_{29} 与 δ 无关.

因为

$$\delta\|E_\rho[X_0,\ X_{I_0}]E_s u\|_0^2\leqslant 2\delta(\|[X_0,\ X_{I_0}]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}+C_{30}\|u\|_s^2)$$

我们可以利用 (2.5 27) 并选取 δ 充分小而得到

$$\|[X_0,\ X_{I_0}]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}\leqslant C_{31}\{\|Pu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,\ X_{I_0}]u\|^2_{s+2^{1-k_0-1}}+\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,\ [X_j,\ X_{I_0}]]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}$$

$$+\|X_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_0-1}}\} \tag{2.5.35}$$

因为对于 $j\neq 0$ 的 $X_I=[X_j,\ X_{I_0}]$,我们有 $|I|=k_0$,由归纳假设推出

$$\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,\ X_{I_0}]u\|^2_{s+2^{1-k_0-1}}\leqslant C_{32}\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{k_0}s}\}$$

对于 $j\neq 0$ 的 $X_I=[X_j,\ [X_j,\ X_{I_0}]]$,我们有 $|I|=k_0+1$,而对于这样的 X_I,上面所证的不等式 (2.5.19) 成立.

因为 $|I_0|=k_0-1$,由归纳假设我们有

$$\|X_{I_0}u\|^2_{2s+2^{1-(k_0-1)-1}}\leqslant C_{33}\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{k_0-1}\cdot 2s}\}$$

因此从 (2.5.35),我们最后得到

$$\|[X_0,\ X_{I_0}]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}\leqslant C_{34}\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{k_0+1}s}\}$$

这就是所要的结论.

定义 如果存在一个数 $R(x_0)$,使得

$$\sum_{|I|\leqslant R(x_0)}|X_I(x_0,\ \xi)|>0,\quad \xi\neq 0 \tag{2.5.36}$$

其中 $X_I(x,\ \xi)$ 是对应于多重指标 $I=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_t)$ 的微分算子 $X_I=\mathrm{ad}X_{\alpha_1}\cdots\mathrm{ad}X_{\alpha_{t-1}}X_{\alpha_t}$ 的象征,则称微分算子组 $\{X_0,\ \cdots,\ X_r\}$

在点 x_0 上为秩 m 的算子组。

显然条件 (2.5.36) 等价于这样的事实：对于 $x = x_0$，在算子 $\{X_I\}$ 中(其中 $|I| \leqslant R(x_0)$) 存在 m 个线性独立的算子，即由算子 $\{X_0, \cdots, X_r\}$ 生成的李代数的秩等于 m。

引理 2.5.3 如果在每点 $x \in K$ 上，其中 K 是 R^m 中的紧集，算子组 $\{X_0, \cdots, X_r\}$ 的秩为 m，则对于任意的 $s \in R^1$，存在一个常数 $C(K, s)$，使得

$$\|u\|_{1+s}^2 \leqslant C(K, s)\left\{\sum_{|I| \leqslant R(K)} \|X_I u\|_s^2 + \|u\|_s^2\right\} \quad (2.5.37)$$

其中 $R(K) = \sup_{x \in K} R(x)$，$u \in C_0^\infty(K)$。

证明 因为 $X_I(x, \xi)$ 是 ξ 的一次齐次函数，并且关于 x 和 ξ 连续，由条件 (2.5.36) 得出：在点 x_0 的某些充分小邻域 $O(x_0)$ 中的所有 x 上，不等式

$$1 + \sum_{|I| \leqslant R(x_0)} |X_I(x, \xi)|^2 \geqslant C_0(1 + |\xi|^2); \ \xi \in R^m \quad (2.5.38)$$

成立，其中 $C_0 = \text{const} > 0$，而 x_0 是属于 K 的任意点.

我们从覆盖 K 的无穷个这样邻域 $O(x)$ 中选取有限个子覆盖因此得到对于属于某闭区域 $K_0 \supset K$ 的所有 x，不等式

$$\sum_{I_1 \leqslant R(K)} |X_I(x, \xi)|^2 + 1 \geqslant C(1 + |\xi|^2) \quad (2.5.39)$$

成立，其中 $C = \text{const} > 0$，并且 K 严格位于 K_0 的内部。

基于定理 2.2.9，从条件 (2.5.39) 得到：对于函数 $u \in C_0^\infty(K)$，不等式 (2.5.37) 成立。

定理 2.5.2 假设算子组 $\{X_0, \cdots, X_r\}$ 在每一点 $x \in \Omega$ 具有秩 m，则对于使得 $Pu \in \mathscr{H}_s^{loc}(\Omega)$ 的任意函数 $u \in D'(\Omega)$ 成立一个形式为

$$\|\varphi u\|_{s+\varepsilon(K)}^2 \leqslant C(K, s)\{\|\varphi_1 Pu\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_\gamma^2\} \quad (2.5.40)$$

的估计，其中 $\gamma = \text{const} < s + \varepsilon(K)$，函数 $\varphi, \varphi_1 \in C_0^\infty(K)$，$K$ 是 Ω 中的一个紧集，在 φ 的支集的一个邻域中 $\varphi_1 = 1$，$\varepsilon(K) > 0$ 是某个数。此外，由 (2.5.1) 给出的算子 P 在 Ω 内是亚椭圆的。

证明 只需证明：如果算子组 $\{X_0, \cdots, X_r\}$ 在每一点 $x\in\Omega$ 具有秩 m，则从 (2.5.1) 所得到的算子 P 满足定理 2.4.2 的条件，但集合 M 理解为空的。假设区域 $G\subset\Omega$ 并且闭包 $\bar{G}$ 也属于 Ω。假设 $\bar{G}$ 使得 $G\supset K$ 并且 $R(\bar{G})=R(K)$。基于引理 2.5.3 和 2.5.2，我们得到如下结论：对于任意的 $t\in R^1$，如果 $s=t+1-2^{1-R(K)}\geqslant 0$，则不等式

$$\|u\|_{t+1}^2\leqslant C_1\left(\sum_{I\leqslant R(K)}\|X_Iu\|_t^2+\|u\|_t^2\right)$$

$$\leqslant C_2\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{R(K)}(t+1-2^{1-R(K)})}\} \qquad (2.5.41)$$

对于 $C_0^\infty(G)$ 中的任意函数 u 成立。我们选取 t 使得

$$t+1>2^{R(K)}(t+1-2^{1-R(K)}),$$

$$t+1\geqslant 2^{1-R(K)} \qquad (2.5.42)$$

则从 (2.5.41) 和定理 2.1.12 推得，对于任意的 $N>0$ 及满足不等式 $-1+2^{1-R(K)}\leqslant t<-1+2(2^{R(K)}-1)^{-1}$ 的某 t，对于 $u\in C_0^\infty(G)$，有

$$\|u\|_{t+1}^2\leqslant C_3\{\|Pu\|_0^2+\|u\|_{-N}^2\} \qquad (2.5.43)$$

我们令 $t+1=\varepsilon(K)$。显然 $\varepsilon(K)>0$。那么从 (2.5.43) 我们得到对于任意的 $N>0$ 和 $u\in C_0^\infty(G)$，有

$$\|u\|_\varepsilon^2\leqslant C_4\{\|Pu\|_0^2+\|u\|_{-N}^2\} \qquad (2.5.44)$$

这表示定理2.4.2 的条件 1 对于 $u\in C_0^\infty(G)$ 是满足的。从定理 2.5.1 和不等式 (2.5.44) 推得：如果 $2s=\varepsilon$，则

$$\|X_0u\|^2_{\frac{\varepsilon-1}{2}}+\sum_{j=1}^r\|X_ju\|^2_{\frac{\varepsilon}{2}}\leqslant C_5\{\|Pu\|_0^2+\|u\|^2_{-N}\}$$

显然

$$P^{(j)}(x,\xi)=\sum_{k=1}^r 2a_k^j(x)X_k(x,\xi)+ia_0^j(x)$$

$$P_{(j)}(x,\xi)=\sum_{k=1}^r 2X_{k(j)}(x,\xi)X_k(x,\xi)+iX_{0(j)}(x,\xi)+\gamma_{(j)}(x)$$

其中 $X_k(x,\xi)=\sum_{j=1}^{m}a_k^j(x)\xi_j$; $k=0,1,\cdots,r$. 因此基于定理 2.2.1，我们有不等式

$$\sum_{j=1}^{r}\{\|P^{(j)}u\|_s^2+\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2\}\leqslant C_6\left\{\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2+\|u\|_s^2\right\},u\in C_0^\infty(G) \tag{2.5.45}$$

我们取算子 E_su，使得 $E_su\in C_0^\infty(G)$，并且假定在区域 Ω_1 的点上 $\varphi(x)=1$，其中 Ω_1 满足 $K\subset\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset G$，而且 $\bar{\Omega}_1$ 是 Ω_1 的闭包。

在不等式

$$\|u\|_\varepsilon^2+\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_{\varepsilon/2}^2\leqslant C_7\{\|Pu\|_0^2+\|u\|_{-N}^2\}$$

中，我们用 E_su 代替 u，因此对于 $u\in C_0^\infty(K)$ 得到

$$\begin{aligned}&\|E_su\|_\varepsilon^2+\sum_{j=1}^{r}\|E_sX_ju\|_{\varepsilon/2}^2\\&\leqslant C_8\{\|PE_su\|_0^2+\sum_{j=1}^{r}\|[X_j,E_s]u\|_{\varepsilon/2}^2+\|u\|_{-N_1}^2\}\end{aligned} \tag{2.5.46}$$

由换位子定理 2.2.3 推得

$$\begin{aligned}\|[P,E_s]u\|_0^2&\leqslant C_9\left\{\sum_{j=1}^{m}(\|E_{s,(j)}P^{(j)}u\|_0^2+\|E_s^{(j)}P_{(j)}u\|_0^2+\|u\|_s^2\right\}\\&\leqslant C_{10}\{\|u\|_s^2+\sum_{j=1}^{m}(\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2+\|P^{(j)}u\|_s^2)\}\end{aligned} \tag{2.5.47}$$

其中 $E_{s(j)}$ 和 $E_s^{(j)}$ 是对应于象征为

$$D_j\varphi(x)(1+|\xi|^2)^{s/2}\quad 和\quad \frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi(x)(1+|\xi|^2)^{s/2})$$

的拟微分算子. 利用不等式 (2.5.45)，得到

$$\|[P,E_s]u\|_0^2\leqslant C_{11}\{\|u\|_s^2+\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_s^2\}$$

从 (2.5.46) 和定理 2.2 6 推得

$$\|u\|_{s+\varepsilon}^{2}+\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_{s+\varepsilon/2}^{2}$$
$$\leqslant C_{12}\left\{\|Pu\|_{s}^{2}+\|u\|_{s+\varepsilon/2}^{2}+\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_{s}^{2}+\|u\|_{-N_2}^{2}\right\} \tag{2.5.48}$$

回顾定理 2.1.12，对于 $u\in C_0^\infty(K)$，我们得到

$$\|u\|_{s+\varepsilon}^{2}+\sum_{j=1}^{r}\|X_j u\|_{s+\varepsilon/2}^{2}\leqslant C_{13}\{\|Pu\|_{s}^{2}+\|u\|_{-N_3}^{2}\} \tag{2.5.49}$$

因此从 (2.5.45) 和 (2.5.49) 推得，对于 $u\in C_0^\infty(K)$

$$\sum_{j=1}^{m}\|P^{(j)}u\|_{s}^{2}\leqslant C_{14}\{\|Pu\|_{s-\varepsilon/2}^{2}+\|u\|_{-N_4}^{2}\} \tag{2.5.50}$$

其中 N_4 是一个任意正数，而 C_{14} 依赖于 N_4。

回顾定理 2.1.12，我们推出对于任意的 $\delta>0$ 和 $N_5>0$，有

$$\sum_{j=1}^{m}\|P_{(j)}u\|_{s-1}^{2}\leqslant C_{15}\{\|Pu\|_{s-\varepsilon/2}^{2}+\|u\|^{2}{}_{N_4}\}$$
$$\leqslant\delta\|Pu\|_{s}^{2}+C_{16}\|u\|_{-N_5}^{2} \tag{2.5.51}$$

其中 C_{16} 依赖于 δ 和 N_5，而 $u\in C_0^\infty(K)$。这表示算子 P 满足对于区域 Ω 的定理 2.4.2 的条件 I，II 和 III_2，从而定理 2.5.2 的论断成立。

现在我们对在某集合 $M\in\Omega$ 上算子组 $\{X_0,\cdots,X_r\}$ 不满足定理 2.5.2 条件的情况，证明 P 的弱解的光滑性和亚椭圆性定理。

下面给出的定理 2.5.3 的证明不依赖于算子 P 的特殊形式 (2.5.1)。

定理 2.5.3 假设在区域 Ω 中形式为 (2.5.1) 的算子 P 满足如下条件：

1) 在点 $x\in\Omega\backslash M$ 上算子组 $\{X_0,\cdots,X_r\}$ 有秩 m，其中 M 是位于有限个 $(m-1)$ 维光滑流形 $\mathfrak{M}$ 上的有界点集，并且 M 的闭包属于 Ω。

2) 在每一点 $x\in M$ 上如下条件成立：或者对于某些 $k=1,\cdots,r$

$$a_k^j(x)\Phi_{x_j}\neq 0 \qquad (2.5.52)$$

或者，如果

$$\sum_{k=1}^{r}|a_k^j(x)\Phi_{x_j}|=0,$$

则

$$\sum_{j=1}^{r}X_j^2\Phi+iX_0\Phi\neq 0 \qquad (2.5.53)$$

其中 $\Phi(x_1,\cdots,x_m)=0$是$\mathfrak{M}$在点 x 的邻域中的方程，$\mathrm{grad}\Phi(x)\neq 0$, $X_k=a_k^jD_j$, $k=0,1,\cdots,r$.

则对于$D'(\Omega)$的每个使得 $Pu\in\mathscr{H}_s^{loc}(\Omega)$的广义函数 u，估计

$$\|\varphi u\|_s^2\leqslant C(\varphi,\gamma)\{\|\varphi_1Pu\|_s^2+|\varphi_1u|_\gamma^2\} \qquad (2.5.54)$$

成立，其中函数 $\varphi,\varphi_1\in C_0^\infty(\Omega)$，在 $\mathrm{supp}\varphi$ 上 $\varphi_1\equiv 1$，此外，或者 $\mathrm{supp}\varphi_1\cap M=\varnothing$，或者在$M$上 $\varphi=1$, $\gamma=\mathrm{const}<s$.

满足条件 1) 和 2) 的微分算子 P 在 Ω 内是全局亚椭圆的，即在 $D'(\Omega)$ 中的满足 $Pu\in C^\infty$ 的广义函数 u 也属于 $C^\infty(\Omega)$.

证明 我们用有限个区域 $\Omega_j(j=1,\cdots,N_1)$来覆盖集合M，使得在每个区域 Ω_j 中可以选取局部坐标系 $y_1,\cdots,y_m$，使得集合 $\mathfrak{M}\cap\Omega_j$ 位于平面 $y_m=0$ 内．此外，假设在新坐标系中算子 P 取形式

$$-Pu=\alpha^{kl}u_{y_ky_l}+\beta^lu_{y_l}+cu,\quad \alpha^{kl}\xi_k\xi_l\geqslant 0 \quad (2.5.55)$$

其中在 Ω_j 的点上

$$\text{或者 } \alpha^{mm}\neq 0,\ \text{或者 } \beta^m\neq 0 \qquad (2.5.56)$$

由定理假设，很容易看到用这样的区域 Ω_j 来覆盖M是可能的。假设 $u\in C_0^\infty(G_{j,\beta})$，其中 $G_{j,\beta}=\Omega_j\cap\{|y_m|\leqslant\beta\}$而常数 β 将在下面选取。

为了估计 $\|u\|_0^2$，我们在 $G_{j,\beta}$ 中考虑函数 v 的方程，这里，v 使得 $u=v(T-e^{\mu y_m})$，其中 $\mu,T=\mathrm{const}$，而且，如果在 Ω_j 内$\beta^m\neq$

0，则在 Ω_l 内 $\operatorname{sign}\mu=\operatorname{sign}\beta^m$；$T>0$．我们有

$$
\begin{aligned}
-(T-e^{\mu y_m})^{-1}Pu &= \alpha^{kl}v_{y_ky_l}+\beta^l v_{y_l}+cv \\
&-(\alpha^{mm}\mu^2+\beta^m\mu)e^{\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-1}v \\
&-2\alpha^{ml}\mu e^{\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-1}v_{y_l}
\end{aligned}
\tag{2.5.57}
$$

我们用 v 乘方程 (2.5.57)，并且在区域 $G_{l,\beta}$ 上积分．假设 v 是实函数．则分部积分后得到

$$
\begin{aligned}
-((T-e^{\mu y_m})^{-1}Pu,\ v) &= -(\alpha^{kl}v_{y_k},\ v_{y_l})+\frac{1}{2}(\alpha^{kl}_{y_ky_l}v,\ v) \\
&-\frac{1}{2}(\beta^l_{y_l}v,\ v)+((c-[\alpha^{mm}\mu^2+\beta^m\mu]e^{\mu y_m}(T \\
&-e^{\mu y_m})^{-1})v,\ v)-2(\alpha^{ml}\mu e^{\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-1}v_{y_l},v)
\end{aligned}
\tag{2.5.58}
$$

由 (2.5.58) 得到

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^{kl}v_{y_k},\ v_{y_l})-\Big(\Big[\ c+\frac{1}{2}\ \alpha^{kl}_{y_ky_l}-\frac{1}{2}\beta^l_{y_l}-(\alpha^{mm}\mu^2 \\
&+\beta^m\mu)e^{\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-1}\Big]v,v\Big)\leqslant|((T-e^{\mu y_m})^{-1}Pu,v)| \\
&+2|(\alpha^{ml}\mu e^{\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-1}v_{y_l},v)\ \leqslant\|(T-e^{\mu y_m})^{-1}Pu\|_0\|v\|_0 \\
&+\frac{1}{2}\left\|\frac{\alpha^{ml}}{\sqrt{\alpha^{mm}}}v_{y_l}\right\|_0^2+2(\alpha^{mm}\mu^2e^{2\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-2}v,\ v)
\end{aligned}
\tag{2.5.59}
$$

根据引理 1.7.1，有不等式

$$(\alpha^{ml}(x)\xi_l)^2\leqslant 2\alpha^{mm}(x)\alpha^{kl}(x)\xi_k\xi_l，对任意\ \xi\in R^m$$

因此

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\alpha^{ml}}{\sqrt{\alpha^{mm}}}v_{y_l}\right\|_0^2\leqslant(\alpha^{kl}v_{y_k},\ v_{y_l})$$

从 (2.5.59) 推得

$$
\begin{aligned}
&-\Big(\Big(C+\frac{1}{2}\ \alpha^{kl}_{y_ky_l}-\frac{1}{2}\beta^l_{y_l}-(\alpha^{mm}\mu^2+\beta^m\mu)e^{\mu y_m}(T \\
&-e^{\mu y_m})^{-1}+2\alpha^{mm}\mu^2e^{2\mu y_m}(T-e^{\mu y_m})^{-2}\Big)v,\ v\Big) \\
&\qquad\leqslant\|v\|_0\|(T-e^{\mu y_m})^{-1}Pu\|_0
\end{aligned}
\tag{2.5.60}
$$

我们选取常数 $\beta(\mu)$，使得对于 $|y_m| \leqslant \beta$ 有不等式 $\frac{1}{2} \leqslant e^{\mu y_m} \leqslant 2$ 成立，我们再从如下条件中选取常数 $T > 0$：对于 $|y_m| \leqslant \beta$

$$2e^{\mu y_m}(T - e^{\mu y_m})^{-1} \leqslant 4(T-2)^{-1} < \frac{1}{2}$$

则由于条件 (2.5.56) 和不等式(2.5.60)推得，对于充分大的 $|\mu|$

$$a_0|\mu|\,\|v\|_0^2 \leqslant (T-2)^{-1}\|Pu\|_0\|v\|_0$$

其中 $a_0 = \text{const} > 0$，并且与 μ 和 T 无关，而 $v \in C_0^\infty(G_{l,\beta})$。

从 (2.5.60) 推得

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{C_1}{\mu^2}\|Pu\|_0^2, \quad 对\ u \in C_0^\infty(G_{l,\beta}) \tag{2.5.61}$$

其中常数 C_1 与 μ 无关。

对于 $u \in C_0^\infty(G_{l,\beta})$，现在我们来估计 $\|P^{(l)}u\|_0^2$ 和 $\|P_{(l)}u\|^2_{-1}$。在定理 2.5.2 的证明中，我们已经证明

$$\|P_{(l)}u\|_{-1}^2 + \|P^{(l)}u\|_0^2 \leqslant C_2\left\{\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_0^2 + \|u\|_0^2\right\} \tag{2.5.62}$$

用 u 乘方程 $Pu = f$，并在 R^m 上积分，得到

$$\sum_{j=1}^{r}\|X_ju\|_0^2 \leqslant C_3\{\|u\|_0^2 + \|Pu\|_0\|u\|_0\} \tag{2.5.63}$$

因此，回顾 (2.5.61)，我们从 (2.5.62) 和 (2.5.63) 得出，对于 $u \in C_0^\infty(G_{l,\beta})$

$$\|P_{(l)}u\|_{-1}^2 + \|P^{(l)}u\|_0^2 \leqslant \frac{C_4}{|\mu|}\|Pu\|_0^2 \tag{2.5.64}$$

其中 C_4 与 μ 无关。

假设 $\phi_l \in C_0^\infty(\Omega_l)$，$0 \leqslant \phi_l \leqslant 1$，在 M 上 $\Sigma_l\phi_l = 1$，并且对所有的 $\beta \leqslant \beta_0$，$G_\beta = \Sigma_l G_{l,\beta}$，其中 β_0 是某充分小的数。假设 $u \in C_0^\infty(G_\beta)$。根据 (2.5.61) 有

$$\|u\|_0 = \left\|\sum_l \phi_l u\right\|_0 \leqslant \sum_l \|\phi_l u\|_0 \leqslant \frac{C_5}{|\mu|}\sum_l \|P\phi_l u\|_0$$

考虑到不等式 (2.5.64)，得到

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{C_6}{\mu^2}\sum_j \|P\phi_j u\|_0^2 \leqslant \frac{C_7}{\mu^2}\sum_j \{\|\phi_j Pu\|_0^2 + \|D_l\phi_j P^{(l)}u\|_0^2 + \|u\|_0^2\}$$

$$\leqslant \frac{C_8}{\mu^2}\sum_j \{\|Pu\|_0^2 + \|P^{(l)}(D_l\phi_j)\cdot u\|_0^2 + \|u\|_0^2\}$$

$$\leqslant \frac{C_9}{\mu^2}\{\|Pu\|_0^2 + \|u\|_0^2\}$$

如果 $1/|\mu|$ 充分小，则

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{C_{10}}{|\mu|^2}\|Pu\|_0^2, \text{ 对 } u\in C_0^\infty(G_\beta) \tag{2.5.65}$$

其中 C_{10} 与 μ 无关。因为算子 P 的系数是实的，所以不等式(2.5.65)对于 $C_0^\infty(G_\beta)$ 中的任意复函数成立。我们注意 β 为 $1/\mu$ 阶。

为了证明定理 2.5.3，我们将验证：定理 2.4.2 的条件 I, II 和 III 成立。

我们先验证对于 $s_0=0$ 定理 2.4.2 的条件 I。在定理 2.5.2 的证明中，我们证过对于每个紧集 $K\subset\Omega$，每个 $s\in R^1$ 和每个 $\beta>0$，存在常数 $C(K,s,\beta)$ 和 $\varepsilon(K,\beta)>0$，使得对于每个函数 $u\in C_0^\infty(K\setminus G_\beta)$，

$$\sum_{j=1}^{m}\{\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 + \|P^{(j)}u\|_s^2\} + \|u\|_s^2$$

$$\leqslant C(K,s,\beta)\{\|Pu\|_{s-\varepsilon}^2 + C_N\|u\|_{s-N}^2\} \tag{2.5.66}$$

成立。现在我们证明由 (2.5.65) 和 (2.5.66) 可以推出估计

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{C_{11}}{|\mu|}\|Pu\|_0^2 + C(\mu,N)\|u\|_{-N}^2 \tag{2.5.67}$$

对于任意的函数 $u\in C_0^\infty(K)$ 成立，其中 C_{11} 与 μ 无关。

设 $\{\phi_1,\phi_2\}$ 是 K 上这样的一个单位分解：$\phi_1\in C_0^\infty(G_{2\beta})$，并且在 G_β 上 $\phi_1=1$。则对于任意的 $u\in C_0^\infty(K)$，根据 (2.5.64)，(2.5.65) 和 (2.5.66)，我们有

$$I \equiv \|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{m}\{\|P^{(j)}u\|_0^2 + \|P_{(j)}u\|_{-1}^2\}$$

$$\leqslant C_{12}\sum_{l=1}^{2}\left\{\|\phi_l u\|_0^2+\sum_{j=1}^{m}(\|P^{(j)}\phi_l u\|_0^2+\|P_{(j)}\phi_l u\|^2_1)\right\}$$

$$\leqslant \frac{C_{13}}{|\mu|}\|P\phi_1 u\|_0^2+C_{14}(\mu)\{\|P\phi_2 u\|^2_{\varepsilon}+\|\phi_2 u\|^2_{-\varepsilon}\}$$

利用定理 2.2.3，得到

$$I\leqslant \frac{C_{15}}{|\mu|}\left\{\|\phi_1 Pu\|_0^2+\|D_j\phi_1 P^{(j)}u\|_0^2+\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha\phi_1\cdot u\|_0^2\right\}$$

$$+C_{16}(\mu)\left\{\|\phi_2 Pu\|^2_{\varepsilon}+\|D_j\phi_2 P^{(j)}u\|^2_{\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha\phi_2 u\|^2_{\varepsilon}+\|\phi_2 u\|^2_{\varepsilon}\right\} \tag{2.5.68}$$

因为对于 $1\leqslant|\alpha|\leqslant 2$，函数 $D^\alpha\phi_1$ 有位于 $K\backslash G_\delta$ 内的支集，从(2.5.66)得到估计

$$\|D_j\phi_1 P^{(j)}u\|_0^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}\|D^\alpha\phi_1 u\|_0^2$$

$$\leqslant C_{17}\left\{\|P^{(j)}(D_j\phi_1\cdot u)\|_0^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}\|D^\alpha\phi_1\cdot u\|_0^2\right\}$$

$$\leqslant C_{18}(\mu)\left\{\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}\|P(D^\alpha\phi_1\cdot u)\|^2_{-\varepsilon}+\|u\|^2_{\varepsilon}\right\}$$

$$\leqslant C_{19}(\mu)\left\{\|Pu\|^2_{\varepsilon}+\|u\|^2_{-\varepsilon}+\sum_{j=1}^{m}\|P^{(j)}u\|^2_{-\varepsilon}\right\} \tag{2.5.69}$$

从 (2.5.68) 并回顾 (2.5.69)，我们导出

$$I\leqslant \frac{C_{20}}{|\mu|}\|Pu\|_0^2+C_{19}(\mu)\left\{\|Pu\|^2_{-\varepsilon}+\sum_{j=1}^{m}\|P^{(j)}u\|^2_{\varepsilon}+\|u\|^2_{\varepsilon}\right\}$$

应用定理 2.1.12 中证过的不等式 (2.1.30)，对于 $u\in C_0^\infty(K)$，如果 $1/|\mu|$ 充分小，得到

$$\|u\|_0^2+\sum_{j=1}^{m}\{\|P_{(j)}u\|^2_1+\|P^{(j)}u\|_0^2\}\leqslant\frac{C_{21}}{|\mu|}\|Pu\|_0^2$$

$$+C(\mu,N)\|u\|^2_{N} \tag{2.5.70}$$

其中 $N>0$ 是任意的，而 C_{21} 与 μ 无关。

从 (2.5.70) 推得定理 2.4.2 的条件 I.

因为不等式 (2.5.70) 对属于 Ω 并且包含 M 的每个紧集 K 成立，从 (2.5.70) 和定理 2.2.6 得到

$$\|u\|_s^2 \leqslant 2\|E_s u\|_0^2 + C_{22}\|u\|_{-N}^2 \leqslant \frac{C_{23}}{|\mu|}\|PE_s u\|_0^2 + C_{24}(\mu, N_1)\|u\|_{-N_1}^2 \tag{2.5.71}$$

借助于换位子定理 2.2.3 和拟微分算子的阶的定理 2.2.1，我们从 (2.5.71) 推出：对于 $u \in C_0^\infty(K)$ 有

$$\|u\|_s^2 \leqslant \frac{C_{25}}{|\mu|}\left\{\|Pu\|_s^2 + \sum_{j=1}^{m}(\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 + \|P^{(j)}u\|_s^2 + \|u_j\|_s^2\right\} + C_{26}\|u\|_{-N_1}^2$$

其中 C_{25} 与 μ 无关。因此对于充分小的 $1/|\mu|$，我们有

$$\|u\|_s^2 \leqslant \frac{C_{27}}{|\mu|}\left\{\|Pu\|_s^2 + \sum_{j=1}^{m}(\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 + \|P^{(j)}u\|_s^2)\right\} + C_{28}\|u\|_{-N_1}^2 \tag{2.5.72}$$

此外，从定理 2.2.6 和不等式 (2.5.70) 得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\{\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 + \|P^{(j)}u\|_s^2\} \\
&\leqslant 2\sum_{j=1}^{m}(\|E_s P_{(j)}u\|_{-1}^2 + \|E_s P^{(j)}u\|_0^2) + C_{29}\|u\|_{-N}^2 \\
&\leqslant C_{30}\left\{\sum_{j=1}^{m}(\|P^{(j)}E_s u\|_0^2 + \|P_{(j)}E_s u\|_{-1}^2) + \|u\|_s^2\right\} \\
&\leqslant \frac{C_{31}}{|\mu|}\|PE_s u\|_0^2 + C_{32}(\|u\|_s^2 + C(\mu)\|u\|_{-N}^2)
\end{aligned}$$

其中 C_{31} 和 C_{32} 与 μ 无关。应用换位子定理 2.2.3 及估计(2.5.72)，得到

$$\sum_{j=1}^{m}\{\|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 + \|P^{(j)}u\|_s^2\}$$

$$\leqslant \frac{C_{33}}{|\mu|}\left\{ \|Pu\|_r^2 + \sum_{j=1}^{m}(\|P_{(j)}u\|_{r-1}^2 + \|P^{(j)}u\|_r^2)\right\}$$

$$+ C_{34}(\mu)\|u\|_N^2 \qquad (2.5.73)$$

因为 C_{33} 与 μ 无关而且 $|\mu|$ 可以选取任意大，从 (2.5.73) 推得定理 2.4.2 的条件 II 和 III 成立。由此，定理 2.5.3 证毕。

从定理 2.5.3 容易得到如下结果。

定理 2.5.4 假设除点 x_0 外，对于 Ω 的每一点算子组 $\{X_0, \cdots, X_r\}$ 有秩 m，并且假设算子 $X_k = \sum_{j=1}^{m} a_k^j D_j (k = 0, 1, \cdots, r)$ 的系数 a_k^j 中至少有一个在点 x_0 上不等于 0。则对于使得 $Pu \in \mathscr{H}_r^{\text{loc}}(\Omega)$ 的每一个广义函数 $u \in D'(\Omega)$，估计 (2.5.54) 成立，并且在区域 Ω 内算子 P 是亚椭圆的。

证明 我们取向量 n 使得在点 x_0 上或者对于某个 $k \geqslant 1$，$a_k^j n_j \neq 0$，或者 $a_0^j n_j \neq 0$。我们取一个通过点 x_0 并且正交于向量 n 的曲面作为流形 $\mathfrak{M}$。由于这样来选取 $\mathfrak{M}$，因而从定理 2.5.3 推出定理 2.5.4 的论断。

对于 $X_0 = 0$ 的情形，Kohn 的论文[66]独立获得类似引理2.5.2 和 2.5.3 的结果。

注 1 定理 2.5.2 关于算子组 $\{X_j, j = 0, 1, \cdots, r\}$ 的秩的条件也是满足以下条件的算子类 Pu 亚椭圆性的必要条件：在区域 Ω 内所有算子 X_l 是由 m_1 个线性独立算子 $X_{l_s} (s = 1, 2, \cdots, m_1)$ 所生成的。如果 $m_1 < m$，则在方程 $Pu = 0$ 至少有一个非平凡解的条件下，在 Ω 内算子 Pu 不是亚椭圆的。

事实上，用 Frobeniu 的定理[25]对于 $m_1 < m$ 的情形，算子 Pu 可以用自变量的局部变换变为一个算子，只是对变量 $y_1, \cdots, y_{m_1}$ 起作用。因此，如果 u 是方程 $Pu = 0$ 在某点 x_0 的邻域内的非平凡解，我们可以在过 x_0 的超平面 $y_m = \text{const}$ 的一边，用零代替 u 而得 $Pv = 0$ 的一个非光滑解，其中

$$v = \begin{cases} u, & \text{当 } y_m \geqslant y_m^0 = \text{const} \\ 0, & \text{当 } y_m < y_m^0 = \text{const} \end{cases}$$

§ 6. 一般二阶微分方程的先验估计和亚椭圆性定理

在这节中，我们将给出具非负特征形式的一般二阶方程

$$L(u)=a^{kl}(x)u_{x_kx_l}+b^ku_{x_k}+cu=f \qquad (2.6.1)$$

及

$$a^{kl}(x)\xi_k\xi_l\geqslant 0,\ \text{对}\ \xi\in R^m$$

(其中，a^{kl}, b^k, c 和 f 是定义在区域Ω中并且属于$C^\infty(\Omega)$的实函数)在区域Ω中亚椭圆性的充分条件和弱解的局部光滑性条件。象在§5中那样不失一般性，我们可以假设(2.6.1)的系数是$C_0^\infty(\Omega)$中的函数，并且它们的支集在紧集K_1内。

我们将用处理算子(2.5.1)同样的模式来处理算子$L(u)$。在什么条件下一般算子(2.6.1)可以化为形式(2.5.1)的问题还没有完全得到研究。(与此有关可参看[102]及这一节末的注。)

用$L^0(x,\xi)$记表达式$a^{kl}(x)\xi_k\xi_l$。用L^0表示象征为$L^0(x,\xi)$的微分算子。紧集K表示包含于Ω内的闭区域。如果A是任意的拟微分算子，我们将分别用$A^{(j)}$和$A_{(j)}$表示象征为$\partial A(x,\xi)/\partial\xi_j$和$D_jA(x,\xi)$的拟微分算子，其中$A(x,\xi)$是算子$A$的象征(在第二章中的其他处也是这样用的)而$D_j=-i\partial/\partial x_j$。

引理 2.6.1 假设A表示为形式$A=A_N+T_N$的算子，其中A_N是一个拟微分算子，其象征满足§2对于$\sigma=t$的条件a)和b)，而T_N是最多为$t-N$阶的算子，其中N是一个正整数。则对于$C_0^\infty(K)$中的任意函数u，有

$$\|LAu\|_{-t}^2\leqslant C(K)\left\{\|Lu\|_0^2+\sum_{j=1}^m(\|L^0_{(j)}u\|_{-1}^2+\|L^{0(j)}u\|_0^2)+\|u\|_0^2\right\} \qquad (2.6.2)$$

证明 根据定理 2.2.3，我们有

$$\|[L,A_N]u\|_{-t}^2\leqslant C_1\left\{\sum_{j=1}^m(\|A_N^{(j)}L_{(j)}u\|_{-t}^2+\|A_{N(j)}L^{(j)}u\|_{-t}^2+\|u\|_0^2\right\}$$

因为算子 $L_{(j)} - L^0_{(j)}$ 最多为 1 阶，而 $L^{(j)} - L^{0(j)}$ 最多为 0 阶，从定理 2.2.1 我们得到

$$\|[L, A_N]u\|^2_{-t} \leqslant C_2\left\{\sum_{j=1}^{m}(\|L^0_{(j)}u\|^2_{-1} + \|L^{0(j)}u\|^2_0) + \|u\|^2_0\right\} \quad (2.6.3)$$

容易看出

$$\begin{aligned}\|LAu\|^2_{-t} &\leqslant 2\|LA_Nu\|^2_{-t} + 2\|LT_Nu\|^2_{-t}\\ &\leqslant 4\{\|A_NLu\|^2_{-t} + \|[L, A_N]u\|^2_{-t} + \|LT_Nu\|^2_{-t}\}\end{aligned}$$

选取 $N > 0$ 并利用(2.6.3)，我们得到

$$\|LAu\|^2_{-t} \leqslant C_3\left\{\|Lu\|^2_0 + \sum_{j=1}^{m}(\|L^0_{(j)}u\|^2_{-1} + \|L^{0(j)}u\|^2_0) + \|u\|^2_0\right\}$$

这就是所要的结果.

引理 2.6.2 如果L是一个具非负特征形式的二阶算子(2.6.1)，则对于任意的 $u \in C_0^\infty(K)$，有

$$\sum_{j=1}^{m}(\|L^{0(j)}u\|^2_0 + \|L^0_{(j)}u\|^2_{-1}) \leqslant C_1\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_0\} \quad (2.6.4)$$

证明 因为对于 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in R^m$，$a^{kj}\xi_k\xi_j \geqslant 0$，从不等式(1.7.10)得到

$$\sum_{j=1}^{m}|a^{kj}(x)D_ku|^2 \leqslant C_2a^{kj}D_ku\overline{D_ju} \quad (2.6.5)$$

其中，常数 C_2 依赖于函数 $a^{kj}(x)$ 在K上绝对值的极大值．在空间 R^m 上积分不等式(2.6.5)，得到

$$\sum_{j=1}^{m}\|L^{0(j)}u\|^2_0 \leqslant 4C_2(a^{kj}D_ku, D_ju) \quad (2.6.6)$$

考虑积分 (Lu, u) 并用分部积分变换它(这里像 §5 那样用 (u, v) 表示$(u, v)_0$)．将 Lu 表示为形式

$$L(u) = -D_j(a^{kj}D_ku) + (D_ja^{kj} + ib^k)D_ku + cu \quad (2.6.7)$$

并且令 $il^k = D_ja^{kj} + ib^k$，使得 l^k 为实函数．那么有

$$(Lu, u) = -(a^{kj}D_ku, D_ju) + (il^kD_ku, u) + (cu, u)$$

和

$$\operatorname{Re}(Lu, u) = -(a^{kj}D_k u, D_j u) + \operatorname{Re}(il^k D_k u, u) + (cu, u) \tag{2.6.8}$$

容易看出

$$(l^k D_k u, u) = \frac{1}{2}(l^k D_k u, u) + \frac{1}{2}(u, l^k D_k u) + \frac{1}{2}(u, (D_k l^k)u)$$

因此

$$\operatorname{Re}(il^k D_k u, u) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[(iu, (D_k l^k)u)]$$

从最后的等式和 (2.6.8) 推出

$$(a^{kj}D_k u, D_j u) \leqslant |(Lu, u)| + C_3\|u\|_0^2 \tag{2.6.9}$$

从 (2.6.6) 和 (2.6.9) 推得

$$\sum_{j=1}^{m} \|L^{0}_{(j)}u\|_0^2 \leqslant C_4\{\|Lu\|_0^2 + \|u\|_0^2\} \tag{2.6.10}$$

我们利用引理 1.7.1 来估计 $L^0_{(j)}u$，根据引理 1.7.1，对于任意函数 $v \in C_0^\infty(K)$，

$$\sum_{j=1}^{m} |a^{kj}_{x_l}(x)D_k D_j v|^2 \leqslant C_5 a^{kj}(x) D_j D_l v \overline{D_k D_l v} \tag{2.6.11}$$

其中，常数 C_5 依赖于函数 $a^{kj}(x)$ 在紧集 $K_1 \supset K$ 上的二阶导数的绝对值的极大值。

在空间 R^m 上积分 (2.6.11)，得到

$$\sum_{l=1}^{m} \|L^0_{(l)}v\|_0^2 \leqslant C_6(a^{kj}D_l D_k v, D_l D_j v) \tag{2.6.12}$$

在 (2.6.9) 式中用 $D_l v$ 代替 u，并利用 (2.6.12)，得到

$$\sum_{l=1}^{m} \|L^0_{(l)}v\|_0^2 \leqslant C_7\{|(L(D_l v), D_l v)| + \|v\|^2\} \tag{2.6.13}$$

令 $v = E_{-1}u$，其中拟微分算子 E_{-1} 有象征 $\varphi(x)(1 + |\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}$，$\varphi(x) \in C_0^\infty(K_1)$ 并且在包含于 K_1 内的紧集 K 上 $\varphi(x) \equiv 1$。从 (2.6.13) 推得对于任意函数 $u \in C_0^\infty(K)$，有

$$\sum_{l=1}^{m}\|L_{(l)}^{0}E_{-1}u\|_0^2\leqslant C_8\{|(LD_lE_{-1}u,\ D_lE_{-1}u)|+\|u\|_0^2\}$$

$$\leqslant C_9\left\{\sum_{l=1}^{m}\mu\|LD_lE_{-1}u\|_0^2+\frac{1}{\mu}\|u\|_0^2\right\}\quad(2.6.14)$$

由定理 2.2.6 和 2.2.3，对于任意函数 $u\in C_0^\infty(K)$，有

$$\sum_{l=1}^{m}\|L_{(l)}^{0}u\|_{-1}^2\leqslant 2\sum_{l=1}^{m}\|E_{-1}L_{(l)}^{0}u\|_0^2+C_{10}\|u\|_0^2$$

$$\leqslant 4\sum_{l=1}^{m}\|L_{(l)}^{0}E_{-1}u\|_0^2+C_{11}\|u\|_0^2\qquad(2.6.15)$$

因此，利用引理 2.6.1，我们从 (2.6.15) 和 (2.6.14) 推得

$$\sum_{l=1}^{m}\|L_{(l)}^{0}u\|_{-1}^2\leqslant C_{12}\left\{\frac{1}{\mu}\|u\|_0^2+\mu\|Lu\|_0^2\right.$$

$$\left.+\mu\sum_{l=1}^{m}(\|L_{(l)}^{0}u\|_{-1}^2+\|L^{0(l)}u\|_0^2)\right\}$$

选取 μ 充分小并利用 (2.6.10)，得到

$$\sum_{l=1}^{m}\|L_{(l)}^{0}u\|_{-1}^2\leqslant C_{13}\{\|Lu\|_0^2+\|u\|_0^2\}\qquad(2.6.16)$$

由 (2.6.10) 和 (2.6.16) 我们得到所需要的不等式(2.6.4)。

引理 2.6.3 如果 A 是满足引理 2.6.1 的条件的任意算子，则对于任意函数 $u\in C_0^\infty(K)$，不等式

$$\|LAu\|_{-s}^2\leqslant C(K)\{\|Lu\|_0^2+\|u\|_0^2\}\qquad(2.6.17)$$

成立。

这是引理 2.6.1 和 2.6.2 的直接结果。

我们将算子 Lu 写为如下的形式

$$L(u)=-D_j(a^{kj}D_ku)+iQu+cu\qquad(2.6.18)$$

其中，$Qu\equiv(b^k-a^{kj}_{x_j})D_ku$。

定理 2.6.1（能量估计） 对于任意的 $s\geqslant 0$ 和 $C_0^\infty(K)$ 类中的任意函数 u，不等式

$$\sum_{j=1}^{m}\{\|L^{0(j)}u\|_s^2+\|L^0_{(j)}u\|_s^2\}+\|Qu\|^2_{s-\frac{1}{2}}\leqslant C(K,s)\{\|Lu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2\}$$
(2.6.19)

成立,其中常数 $C(K,s)$ 依赖于 K 和 s。

证明 从 (2.6.6) 和 (2.6.9) 推得对于 $s\geqslant 0$, 有

$$\sum_{j=1}^{m}\|L^{0(j)}v\|_0^2\leqslant C_1\{|(Lv,v)|+\|v\|_0^2\}\leqslant 2C_1\{\|Lv\|_{-s}^2+\|v\|_s^2\}$$
(2.6.20)

令 $v=E_su$, 其中 $u\in C_0^\infty(K)$. 从 (2.6.20) 得到

$$\sum_{j=1}^{m}\|L^{0(j)}E_su\|_0^2\leqslant C_2\{\|LE_su\|^2_{-s}+\|u\|_{2s}^2\}\qquad(2.6.21)$$

基于定理 2.2.6,对于任意函数 $u\in C_0^\infty(K)$,我们有

$$\|L^{0(j)}u\|_s^2\leqslant 4\|L^{0(j)}E_su\|_0^2+4\|[E_s,L^{0(j)}]u\|_0^2+C_3\|u\|_0^2\quad(2.6.22)$$

应用引理 2.6.3 和关于拟微分算子的阶的定理 2.2.1, 从 (2.6.22) 和 (2.6.21) 我们得到

$$\sum_{j=1}^{m}\|L^{0(j)}u\|_s^2\leqslant C_4\{\|Lu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2\}\qquad(2.6.23)$$

从 (2.6.13) 和 (2.1.19), 得到

$$\sum_{j=1}^{m}\|L^0_{(j)}v\|_0^2\leqslant C_5\left\{\sum_{l=1}^{m}\|LD_lv\|^2_{-s}+\|v\|^2_{s+1}\right\}$$

其中 $\operatorname{supp}v\subset K_1$. 在此不等式中,我们设 $v=E_{s-1}u$, 其中 $u\in C_0^\infty(K)$ 并且 $s\geqslant 0$. 利用引理 2.6.3,得到

$$\sum_{j=1}^{m}\|L^0_{(j)}E_{s-1}u\|_0^2\leqslant C_5\left\{\sum_{l=1}^{m}(\|LD_lE_{s-1}u\|)^2_{-s}+\|E_{s-1}u\|^2_{s+1}\right\}$$
$$\leqslant C_6\{\|Lu\|_0^2+\|u\|_{2s}^2\}\qquad(2.6.24)$$

从定理 2.2.6 和 2.2.3, 有

$$\begin{aligned}\|L^0_{(j)}u\|^2_{s-1}&\leqslant 2\|E_{s-1}L^0_{(j)}u\|_0^2+C_7\|u\|_0^2\\&\leqslant 4\|L^0_{(j)}E_{s-1}u\|_0^2+4\|[E_{s-1},L^0_{(j)}]u\|_0^2+C_8\|u\|_0^2\\&\leqslant 4\|L^0_{(j)}E_{s-1}u\|_0^2+C_9\|u\|_s^2\end{aligned}$$

考虑 (2.6.24)，从最后这一不等式我们推得：

$$\|L^0_{(l)}u\|^2_{s-1} \leqslant C_{10}\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s}\} \tag{2.6.25}$$

要完成定理 2.6.1 的证明，剩下只需要估计 $\|Qu\|^2_{s-\frac{1}{2}}$. 为了这个目的，我们将算子 Lu 表示为 (2.6.18) 的形式，并考察表达式 $(LE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su)$，其中 E^*_s 为 E_s 的共轭算子. 作一个简单变换后，我们有

$$(LE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su) = t\|E_{-\frac{1}{2}}QE_su\|^2_0 - (a^{kl}D_kE_su,\ D_lE^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su) + (cE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su) \tag{2.6.26}$$

我们分别估计 (2.6.26) 的各项，有

$$I_1 \equiv |(LE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su)| \leqslant \frac{1}{2}(\|LE_su\|^2_{-s} + \|E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su\|^2_s) \tag{2.6.27}$$

根据引理 2.6.3 和定理 2.2.1，得到

$$I_1 \leqslant C_{11}\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s}\}$$

此外，显然有

$$I_2 \equiv |(cE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su)| \leqslant C_{12}\|u\|^2_s$$

因为 $a^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geqslant 0$，对于 $u, v \in C^\infty_0(R^m)$，我们有

$$|(a^{kl}D_ku,\ D_lv)| \leqslant \frac{1}{2}\{(a^{kl}D_ku,\ D_lu) + (a^{kl}D_kv,\ D_lv)\} \tag{2.6.28}$$

因此

$$I_3 = |(a^{kl}D_kE_su,\ D_lE^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su)| \leqslant \frac{1}{2}\{(a^{kl}D_kE_su,\ D_lE_su) + (a^{kl}D_kE^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su,\ D_lE^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su)\} \tag{2.6.29}$$

我们利用 (2.6.9) 来估计 (2.6.29) 右端的积分，有

$$I_3 \leqslant |(LE_su,\ E_su)| + |(LE^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su,\ E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su)| + C_{13}(\|E_su\|^2_0 + \|E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_su\|^2_0)$$

基于此估计，引理 2.6.3 和定理 2.2.1，得到

$$I_3 \leqslant \|LE_s u\|^2_{-s} + \|E_s u\|^2_s + \|LE^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_s u\|^2_{-s}$$
$$+ \|E^*_{-\frac{1}{2}}E_{-\frac{1}{2}}QE_s u\|^2_s + C_{14}\|u\|^2_s \leqslant C_{15}\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s}\}$$

从 (2.6.26) 推出

$$\|E_{-\frac{1}{2}}QE_s u\|^2_0 \leqslant I_1 + I_2 + I_3 \leqslant C_{16}\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s}\} \quad (2.6.30)$$

根据定理 2.2.6，有

$$\|Qu\|^2_{s-\frac{1}{2}} \leqslant 4\|E_{-\frac{1}{2}}E_s Qu\|^2_0 + C_{17}\|u\|^2_0$$
$$\leqslant C_{18}\{\|E_{-\frac{1}{2}}QE_s u\|^2_0 + \|E_{-\frac{1}{2}}[E_s, Q]u\|^2_0 + \|u\|^2_0\}$$
$$\leqslant C_{19}\{\|E_{-\frac{1}{2}}QE_s u\|^2_0 + \|u\|^2_s\} \quad (2.6.31)$$

不等式 (2.6.31) 和 (2.6.30) 给出

$$\|Qu\|^2_{s-\frac{1}{2}} \leqslant C_{20}\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s}\} \quad (2.6.32)$$

这就是所要的结果.

我们考虑算子组 $\{Q_0, \cdots, Q_{2m}\}$，其中 $Q_0 = Q$，当 $j = 1, \cdots, m$ 时 $Q_j = L^{(j)}$，而当 $j = m + 1, \cdots, 2m$ 时 $Q_j = E_{-1}L^0_{(j-m)}$。对于多重指标 $I = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$，其中当 $l = 1, \cdots, k$ 时 $\alpha_l = 0, 1, \cdots, 2m$，令 $|I| = \Sigma_1^k \lambda_l$，数 λ_l 当 $\alpha_l = 1, \cdots, 2m$ 时为 1，而当 $\alpha_l = 0$ 时为 2. 对于每一多重指标 I，我们联系一个算子

$$Q_I = \mathrm{ad}Q_{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad}Q_{\alpha_{k-1}}Q_{\alpha_k}$$

其中，跟前面一样，$\mathrm{ad}AB = AB - BA = [A, B]$.

引理 2.6.4 对于任意的紧集 K，任意的 $k \geqslant 1$ 和每个 $s \geqslant 0$，存在一个常数 $C(K, s, k)$，使得对于任意的 $C_0^\infty(K)$ 中的函数 u，成立如下不等式

$$\sum_{|I|=k} \|Q_I u\|^2_{2^{1-k}+s-1} \leqslant C(K, s, k)\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2ks}\} \quad (2.6.33)$$

证明 我们先证明在 $k \leqslant 2$ 时 (2.6.33) 成立. 对于 $k = 2$，如果 $Q_I = Q_0$，由于估计 (2.6.32)，不等式 (2.6.33) 成立. 如果 $Q_I = [Q_j, Q_l]$，其中 $j, l \neq 0$，那么根据定理 2.2.8，我们有

$$\|[Q_j, Q_l]u\|^2_{s-\frac{1}{2}} \leqslant C_1\left\{\sum_{j=1}^{2m} \|Q_j u\|^2_s + \|u\|^2_s\right\} \quad (2.6.34)$$

我们利用定理 2.6.1 来估计 (2.6.34) 的右端，得到

$$\|[Q_j, Q_l]u\|^2_{s-\frac{1}{2}} \leqslant C_2\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s}\}$$

这表示对于这种情形，在 $k=2$ 时 (2.6.33) 也成立。

对于一般情形，我们用归纳法来证明(2.6.33)。我们假定 $k\leqslant k_0$ 时此不等式成立，我们证明 $k=k_0+1$ 时此不等式仍然成立。先考虑 $Q_I=[Q_{I_1}, Q_j]$ 的情况，其中 $|I_1|=k_0$，$j\neq 0$。那么根据对于 $s_1=-1+2^{1-k_0}$ 的定理 2.2.8，我们得到

$$\sum_{j=1}^{2m}\sum_{|I_1|=k_0}\|[Q_{I_1}, Q_j]u\|^2_{s-1+2^{-k_0}}$$
$$\leqslant C_3\left\{\sum_{j=1}^{2m}\|Q_ju\|_s^2+\|Q_{I_1}u\|^2_{s-1+2^{1-k_0}}+\|u\|_s^2\right\} \tag{2.6.35}$$

根据定理 2.6.1 和归纳假设，(2.6.35) 的右端可以由

$$C_4\{\|Lu\|_0^2+\|u\|^2_{2k_0s}\}$$

来估计，这就对所考虑的情形证明了 (2.6.33)。

现在假设 $Q_I=[Q_0, Q_{I_0}]$，其中 $|I_0|=k_0-1\geqslant 1$。对应于 $k_0=1$ 的算子 $Q_I=[Q_0, Q_j]$ 可由 (2.6.35) 估计。我们将算子 $L(u)$ 写为形式 (2.6.18)。那么

$$L^*(u)=-D_j(a^{kj}D_ku)-iQu+c^*u$$

其中，$c^*\in C_0^\infty(R^m)$，而 Q_I 可以表示为形式

$$Q_Iw=[Q_0, Q_{I_0}]w=\frac{1}{i}(-D_j(a^{kj}D_k)-L^*+c^*)Q_{I_0}w$$
$$-\frac{1}{i}Q_{I_0}(L+D_j(a^{kj}D_k)-c)w \tag{2.6.36}$$

在方程 (2.6.36) 中，令 $w=E_su$，并乘以 $\bar v$，其中 $v=E_\rho^*E_\rho[Q_0, Q_{I_0}]E_su$，而且 $\rho=2^{-k_0}-1$，并且在 R^m 上积分。

由此我们得到

$$\|E_{2^{-k_0}-1}[Q_0, Q_{I_0}]E_su\|^2$$
$$=|-(L^*Q_{I_0}E_su, v)+(-Q_{I_0}LE_su, v)-(a^{kj}D_kQ_{I_0}E_su, D_jv)$$
$$-(Q_{I_0}D_j(a^{kj}D_k)E_su, v)+(c^*Q_{I_0}E_su, v)+(Q_{I_0}cE_su, v)| \tag{2.6.37}$$

我们来估计 (2.6.37) 右端的积分. 应用 Schwarz 不等式 (2.1.19)、引理 2.6.3 和定理 2.2.3，得到

$$V_1 = |(LE_s u, Q^*_{I_0}v)| \leqslant \|LE_s u\|^2_{-s} + \|Q^*_{I_0}v\|^2_s$$
$$\leqslant C_5\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s} + \|Q_{I_0}u\|^2_{2s+2^{1-k_0-1}}\}$$

用完全相同的方法可以估计

$$V_2 \equiv |(Q_{I_0}E_s u,\ Lv)| \leqslant \|Lv\|^2_{1-s-2^{1-k_0}} + \|Q_{I_0}E_s u\|^2_{s+2^{1-k_0-1}}$$
$$\leqslant C_6\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s} + \|Q_{I_0}u\|^2_{2s+2^{1-k_0-1}}\}$$

容易看出

$$V_3 \equiv |(c^*Q_{I_0}E_s u,\ v)| + |(Q_{I_0}cE_s u,\ v)|$$
$$\leqslant C_7\{\|c^*Q_{I_0}E_s u\|^2_{2^{1-k_0-1}} + \|v\|^2_{1-2^1-k_0} + \|Q_{I_0}cE_s u\|^2_{2^{1-k_0-1}}\}$$

利用定理 2.2.1 和 2.2.3，得到

$$V_3 \leqslant C_8\{\|u\|^2_s + \|Q_{I_0}u\|^2_{s+2^{1-k_0-1}}\}$$

利用不等式 (2.6.28) 来估计积分

$$V_4 \equiv |(a^{kj}D_k E_s u, D_j Q^*_{I_0}v)|$$

我们有

$$V_4 \leqslant \{(a^{kj}D_k E_s u,\ D_j E_s u) + (a^{kj}D_k Q^*_{I_0}v,\ D_j Q^*_{I_0}v)\}$$

再根据 (2.6.9)，得到

$$V_4 \leqslant C_9\{|(LE_s u,\ E_s u)| + \|u\|^2_s + |(LQ^*_{I_0}v, Q^*_{I_0}v)| + \|Q^*_{I_0}v\|^2_0\}$$

利用 (2.1.19) 和引理 2.6.3 中所证的估计，我们得到

$$V_4 \leqslant C_{10}\{\|LE_s u\|^2_{-s} + \|u\|^2_{2s} + \|LQ^*_{I_0}v\|^2_{-s-2^{1-k_0}} + \|Q^*_{I_0}v\|^2_{s+2^{1-k_0}}\}$$
$$\leqslant C_{11}\{\|Lu\|^2_0 + \|u\|^2_{2s} + \|Q_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_0-1}}\}$$

这里，我们利用了 $2^{2-k_0} - 1 \leqslant 0$ 这一事实. 在 (2.6.37) 右端的形式为

$$V_5 = |(a^{kj}D_k Q_{I_0}E_s u,\ D_j v)|$$

的积分可以变换为下面的方式

$$\begin{aligned}V_5 = |&(a^{kj}D_k Q_{I_0}E_s u,\ D_j(E^*_\rho E_\rho - E^*_{2^{1-k_0-1}}E_{-1})[Q_0,\ Q_{I_0}]E_s u)\\ &+ (a^{kj}D_k Q_{I_0}E_s u,\ [D_j,\ E^*_{2^{1-k_0-1}}]E_{-1}[Q_0, Q_{I_0}]E_s u)\\ &+ (a^{kj}D_k E_{2^{1-k_0-1}}Q_{I_0}E_s u,\ D_j E_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_s u)\\ &+ ([E_{2^{1-k_0-1}},\ \tfrac{1}{2}L^{0(j)}]Q_{I_0}E_s u,\ D_j E_{-1}[Q_0, Q_{I_0}]E_s u)|\end{aligned} \quad (2.6.38)$$

(2.6 38) 右端的前三个积分可以按估计 V_4 的同样方法进行估计．有

$$w_1 = |(a^{kj}D_kQ_{I_0}E_su,\ D_j(E_\rho^*E_\rho - E_{2^{1-k_{0-1}}}^*E_{-1})[Q_0,Q_{I_0}]E_su)|$$

$$\leqslant |(a^{kj}D_k\{(E_\rho^*E_\rho - E_{2^{1-k_{0-1}}}^*E_{-1})[Q_0,\ Q_{I_0}]\}^*Q_{I_0}E_su,D_jE_su)|$$

$$+ |([\{(E_\rho^*E_\rho - E_{2^{1-k_{0-1}}}^*E_{-1})[Q_0,\ Q_{I_0}]\}^*,\ \tilde{L}^0]Q_{I_0}E_su,E_su),$$

其中，$\tilde{L}^0 = D_j(a^{kj}D_k)$. 利用 (2.6.28),(2.6.9) 和引理 2.6.3,并且注意算子 $E_\rho^*E_\rho - E_{2^{1-k_{0-1}}}^*E_{-1}$ 的阶不能超过 $-3+2^{1-k_0}$, 我们得到如下不等式

$$w_1 \leqslant C_{12}\{\|L\{(E_\rho^*E_\rho - E_{2^{1-k_{0-1}}}^*E_{-1})[Q_0,\ Q_{I_0}]\}^*Q_{I_0}E_su\|_{1-s-2^{1-k_0}}^2$$

$$+ \|\{(E_\rho^*E_\rho - E_{2^{1-k_{0-1}}}^*E_{-1})[Q_0,Q_{I_0}]\}^*Q_{I_0}E_su\|_{s+2^{1-k_{0-1}}}^2$$

$$+ \|u\|_{2s}^2 + \|LE_su\|_{-s}^2 + \|Q_{I_0}u\|_{s+2^{1-k_{0-1}}}^2\}$$

$$\leqslant C_{13}\{\|Lu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2 + \|Q_{I_0}u\|_{s+2^{1-k_{0-1}}}^2\}$$

我们估计积分

$$w_2 \equiv |(a^{kj}D_kQ_{I_0}E_su,\ [D_j,\ E_{2^{1-k_{0-1}}}^*]E_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_su)|$$

$$\leqslant |(a^{kj}D_kQ_{I_0}E_su,\ E_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_s[D_j,E_{2^{1-k_{0-1}}}^*]u)$$

$$+ (a^{kj}D_kQ_{I_0}E_su,\ [[D_j,\ E_{2^{1-k_{0-1}}}^*],E_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_s]u)|$$

注意 $u\in C_0^\infty(K)$, 并且在算子 $E_{2^{1-k_{0-1}}}^*$ 的象征中的函数 $\varphi(x)$ 在 K 上等于 1, 因此根据定理 2.2.4 和 2.2.3, 有

$$\|[D_j,\ E_{2^{1-k_{0-1}}}^*]u\|_N^2 \leqslant C_N\|u\|_0^2$$

其中, N 是任意的非负数. 因此利用 (2.1.19), 得到

$$w_2 \leqslant C_{14}\{\|u\|_0^2 + \|a^{kj}D_jQ_{I_0}E_su\|_{-2+2^{1-k_0}}^2$$

$$+ \|[[D_j,\ E_{2^{1-k_{0-1}}}^*],E_{-1}[Q_0,Q_{I_0}]E_s]u\|_{2-2^{1-k_0}}^2\}$$

$$\leqslant C_{15}\{\|u\|_s^2 + \|Q_{I_0}u\|_{s-1+2^{1-k_0}}^2\}$$

根据不等式 (2.6.28) 和 (2.6.9), 有

$$w_3 \equiv |(a^{kj}D_kE_{2^{1-k_{0-1}}}Q_{I_0}E_su,\ D_jE_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_su)|$$

$$\leqslant C_{16}\{|(L(E_{2^{1-k_{0-1}}}Q_{I_0}E_su),\ E_{2^{1-k_{0-1}}}Q_{I_0}E_su)|$$

$$+ \|E_{2^{1-k_{0-1}}}Q_{I_0}E_su\|_0^2 + \|E_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_su\|_0^2$$

$$+ |(L(E_{-1}[Q_0,\ Q_{I_0}]E_su),\ E_{-1}[Q_0,Q_{I_0}]E_su)|\}$$

应用 (2.1.19) 和引理 2.6.3, 得到

$$w_3 \leqslant C_{17}\{\|Lu\|_0^2 + \|Q_{I_0}u\|_{2s+2^{1-k_{0-1}}}^2$$

$$+\|Q_{l_0}u\|^2_{s+2^{1-k_0}-1}+\|u\|^2_{2s}\}$$

现在我们来估计 (2.6.38) 的最后的积分：

$$w_4=|([E_\nu,\ L^{0(j)}]Q_{l_0}E_su,\ D_jE_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su)|$$

其中 $\nu=2^{1-k_0}-1$。

基于定理 2.2.3，

$$w_4\leqslant|((L^{0(j)}_{(l)}E^{(l)}_\nu-L^{0(j)(l)}E_{\nu(l)})Q_{l_0}E_su,\ D_jE_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su)|$$

$$+\sum_{j=1}^m|(TQ_{l_0}E_su,\ D_jE_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su)|=w_5+w_6$$

(2.6.39)

其中，T 是一个最多为 $2^{1-k_0}-2$ 阶的算子. 如前面所提及的，我们用 $A^{(l)}$ 和 $A_{(l)}$ 表示象征分别为 $\partial A(x,\ \xi)/\partial\xi_l$ 和 $D_lA(x,\ \xi)$ 的算子，其中 $A(x,\xi)$ 是算子 A 的象征. 根据 Schwarz 不等式 (2.1.19)，有

$$w_6\leqslant\sum_{j=1}^m\{\|TQ_{l_0}E_su\|^2_1+\|D_jE_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su\|^2_{-1}\}$$

$$\leqslant C_{18}\{\|Q_{l_0}u\|^2_{s+2^{1-k_0}-1}+\|u\|^2_s\}$$

我们按照这种方式来变换积分 w_5：

$$w_5=|((L^{0(j)}_{(l)}D_jE^{(l)}_\nu-L^{0(j)(l)}D_jE_{\nu(l)})Q_{l_0}E_su,\ E_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su)$$

$$+(\{[D_j,L^{0(j)}_{(l)}]E^{(l)}_\nu Q_{l_0}E_su-[D_j,\ L^{0(j)(l)}]E_{\nu(l)}Q_{l_0}E_su\},$$

$$E_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su)|$$

显然，$L^{0(j)}_{(l)}D_j=2L^0_{(l)}$，$L^{0(j)(l)}D_j=L^{0(l)}$. 因此，利用定理 2.2.1 和 2.2.3，得到

$$w_5\leqslant|((2L^0_{(l)}E^{(l)}_\nu-L^{0(l)}E_{\nu(l)})Q_{l_0}E_su,\ E_{-1}[Q_0,\ Q_{l_0}]E_su)|$$

$$+C_{19}\{\|u\|^2_s+\|Q_{l_0}u\|^2_{s+2^{1-k_0}-1}\}$$

$$\leqslant C_{20}\{\|L^0_{(l)}E^{(l)}_\nu Q_{l_0}E_su\|^2_0+\|u\|^2_s$$

$$+\|L^{0(l)}E_{\nu(l)}Q_{l_0}E_su\|^2_0+\|Q_{l_0}u\|^2_{s+2^{1-k_0}-1}\}\qquad(2.6.40)$$

再利用在证明引理 2.6.2 时所得到的不等式 (2.6.10) 和 (2.6.13)，因此有

$$\|L^0_{(l)}v\|^2_0\leqslant C_{21}\{|(LD_kv,\ D_kv)|+\|v\|^2_1\}$$

$$\leqslant C_{22}\left\{\sum_{k=1}^{m}\|LD_k v\|^2_{-s-2^{1-k_0}}+\|v\|^2_{1+s+2^{1-k_0}}+\|v\|^2_1\right\} \quad (2.6.41)$$

$$\begin{aligned}\|L^{0(I)}v\|_0^2 &\leqslant C_{23}\{|(Lv, v)|+\|v\|_0^2\}\\ &\leqslant C_{24}\{\|Lv\|^2_{-s-2^{1-k_0}}+\|v\|^2_{s+2^{1-k_0}}\}\end{aligned} \quad (2.6.42)$$

从引理 2.6.3 与不等式 (2.6.40)—(2.6.42)，得到

$$w_5\leqslant C_{25}\{\|Lu\|_0^2+\|u\|^2_{2s}+\|Q_{I_0}u\|^2_{2s-1+2^{2-k_0}}+\|Q_{I_0}u\|^2_{s+2^{1-k_0-1}}\}$$

因此，记住对 w_i 和 V_i 所得的估计，从 (2.6.37) 得到下面的估计

$$\|E_{2^{-k_0-1}}[Q_0, Q_{I_0}]E_s u\|_0^2\leqslant C_{26}\{\|Lu\|_0^2+\|Q_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_0-1}}+\|u\|^2_{2s}\} \quad (2.6.43)$$

再根据定理 2.2.6，有

$$\begin{aligned}\|[Q_0, Q_{I_0}]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}} &\leqslant C_{27}\{\|u\|_s^2+\|E_{2^{-k_0-1}}E_s[Q_0, Q_{I_0}]u\|_0^2\}\\ &\leqslant C_{28}\{\|u\|_s^2+\|E_{2^{-k_0-1}}[Q_0, Q_{I_0}]E_s u\|_0^2\}\end{aligned} \quad (2.6.44)$$

从 (2.6.44) 和 (2.6.43) 得到

$$\|[Q_0, Q_{I_0}]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}\leqslant C_{29}\{\|Lu\|_0^2+\|Q_{I_0}u\|^2_{2s+2^{2-k_0-1}}+\|u\|^2_{2s}\} \quad (2.6.45)$$

现在归纳假设为

$$\|Q_{I_0}u\|^2_{2s+2^{1-(k_0-1)-1}}\leqslant C_{30}\{\|Lu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{k_0-1}\cdot 2s}\}$$

从这一不等式和 (2.6.45)，我们得出如下结论

$$\|[Q_0, Q_{I_0}]u\|^2_{s+2^{-k_0-1}}\leqslant C_{31}\{\|Lu\|_0^2+\|u\|^2_{2^{k_0}s}\}$$

这意味着 (2.6.33) 对于所考虑的情况成立。定理证毕。

我们考虑由算子组 $Q_0, \cdots, Q_{2m}$ 生成的算子 Q_I。根据定理 2.2.3，对于每一多重指标 $I=(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$，算子 Q_I 可以写为形式：

$$Q_I=Q_I^0+T_I \quad (2.6.46)$$

其中算子 T_I 最多为 0 阶，而 Q_I^0 是对应于 $\sigma=1$ 且象征为 $q_I^0(x, \xi)$ 的拟微分算子。

定义 在紧集 K 上的算子组 $\{Q_0, \cdots, Q_{2m}\}$ 称作是秩为 m 的算子组，如果存在一个数 $R(K)$，使得对于所有的 $x\in K$ 和所有的 $\xi\in R^m$，有

$$1+\sum_{I,\leqslant R(K)}|q_I^0(x,\xi)|^2\geqslant C_0(1+|\xi|^2),\quad C_0=\text{const}>0 \tag{2.6.47}$$

定理 2.6.2 假设 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 是在 K 上秩为 m 的算子组，则存在常数 $C(K)>0$ 和 $\varepsilon(K)$，使得对于满足条件 $Lu\in\mathscr{H}_s^{\text{loc}}(\Omega)$ 的任意广义函数 $u\in D'(\Omega)$（即对于任意函数 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有 $\phi Lu\in\mathscr{H}_s$），估计

$$\|\varphi u\|_{s+\varepsilon(K)}^2\leqslant C(K,s)\{\|\varphi_1 Lu\|_s^2+\|\varphi_1 u\|_\gamma^2\} \tag{2.6.48}$$

成立，其中函数 $\varphi,\ \varphi_1\in C_0^\infty(K)$，而且在 $\operatorname{supp}\varphi$ 上 $\varphi_1\equiv 1$ 并且 $\gamma=\text{const}<s+\varepsilon(K)$. 如果算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 的秩在每一紧集上等于 m，则算子 L 在 Ω 内是亚椭圆的.

证明 我们证明：对于在 (2.6.1) 中的算子 $L(u)$ 定理 2.4.2 的条件满足. 因为由假设不等式 (2.6.47) 成立. 由定理 2.2.9 推出对于任意函数 $u\in C_0^\infty(K)$，有估计

$$\|u\|_{s+1}^2\leqslant C_1\left\{\sum_{|I|\leqslant R(K)}\|Q_I^0u\|_s^2+\|u\|_s^2\right\}$$

由此和 Q_I 的表达式 (2.6.46) 推得

$$\|u\|_{s+1}^2\leqslant C_2\left\{\sum_{I|\leqslant R(K)}(\|Q_Iu\|_s^2+\|T_Iu\|_s^2)+\|u\|_s^2\right\}$$

$$\leqslant C_3\left\{\sum_{I,\leqslant R(K)}\|Q_Iu\|_s^2+\|u\|_s^2\right\}$$

象证定理 2.5.2 时那样，利用引理 2.6.4，对于 $s+1-2^{1-R(K)}\geqslant 0$，我们得到估计

$$\|u\|_{s+1}^2\leqslant C_4\{\|Lu\|_0^2+\|u\|_s^2+\|u\|_{2^{R(K)}(s+1-2^{1-R(K)})}^2\} \tag{2.6.49}$$

现在我们选取 s，使得

$$s+1>2^{R(K)}(s+1-2^{1-R(K)})\geqslant 0$$

由此得到 $2(2^{R(K)}-1)^{-1}>s+1\geqslant 2^{1-R(K)}$. 因为 $2^{1-R(K)}<2(2^{R(K)}-1)^{-1}$，所以这种 s 存在. 我们用 $\varepsilon(K)$ 表示 $s+1$. 显然 $\varepsilon(K)>0$. 从 (2.6.49) 和定理 2.1.12 得到，对于一切 $u\in C_0^\infty(K)$，有

$$\|u\|_s^2 \leqslant C_5\{\|Lu\|_0^2 + \|u\|_{-N}^2\} \tag{2.6.50}$$

因此我们得到定理 2.4.2 的条件 I 的不等式 (2.4.18). 根据定理 2.6.1 (能量估计),对于一切 $u \in C_0^\infty(K)$ 和 $s \geqslant 0$, 有

$$\sum_{j=1}^m (\|L^{0(j)} u\|_s^2 + \|L_{(j)}^0 u\|_{s-1}^2) \leqslant C_6\{\|Lu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2\} \tag{2.6.51}$$

容易看出

$$L^{0(j)} = L^{(j)} - T_0 \tag{2.6.52}$$

其中 T_0 是最多为 0 阶的算子,而且

$$L_{(j)} = L_{(j)}^0 + T_1 \tag{2.6.53}$$

其中, T_1 是最多为 1 阶的算子. 由 (2.6.51) 得到

$$\sum_{j=1}^m (\|L^{(j)}u\|_s^2 + \|L_{(j)}u\|_{s-1}^2) \leqslant C_7\{\|Lu\|_0^2 + \|u\|_{2s}^2\} \tag{2.6.54}$$

在 (2.6.54) 中,我们令 $2s = \varepsilon(K)$, 则

$$\sum_{j=1}^m (\|L^{(j)}u\|_{\varepsilon/2}^2 + \|L_{(j)}u\|_{\varepsilon/2-1}^2) + \|u\|_\varepsilon^2$$
$$\leqslant C_8\{\|Lu\|_0^2 + \|u\|_{-N}^2\}, \quad u \in C_0^\infty(K) \tag{2.6.55}$$

在 (2.6.55) 中, 我们用 $E_s u$ 代替 u. 应用定理 2.2.6 和 2.2.3, 从 (2.6.55) 得到

$$\sum_{j=1}^m (\|L^{(j)}u\|_{s+\varepsilon/2}^2 + \|L_{(j)}u\|_{s-1+\varepsilon/2}^2) + \|u\|_{s+\varepsilon}^2$$
$$\leqslant C_9\left\{\sum_{j=1}^m (\|E_sL^{(j)}u\|_{\varepsilon/2}^2 + \|E_sL_{(j)}u\|_{\varepsilon/2-1}^2) + \|E_su\|_\varepsilon^2 + \|u\|_{-N}^2\right\}$$
$$\leqslant C_{10}\{\|LE_su\|_0^2 + \|u\|_{-N_1}^2 + \|u\|_{s+\varepsilon/2}^2$$
$$\leqslant C_{11}\left\{\|u\|_{s+\varepsilon/2}^2 + \sum_{j=1}^m (\|L^{(j)}u\|_s^2 + \|L_{(j)}u\|_{s-1}^2) + \|Lu\|_s^2\right\}$$

回忆定理 2.1.12 的不等式 (2.1.30), 我们最后得到: 对于任何 $s \in R^1$,

$$\sum_{j=1}^m (\|L^{(j)}u\|_{s+\varepsilon/2}^2 + \|L_{(j)}u\|_{s-1+\varepsilon/2}^2) \leqslant C_{12}\{\|Lu\|_s^2 + \|u\|_{-N}^2\} \tag{2.6.56}$$

显然，从(2.6.56)可以推得定理2.4.2的不等式(2.4.19)和(2.4.20)。定理证毕。

下面类似于定理2.5.3的定理对于(2.6.1)型的方程也成立。

定理 2.6.3 假设(2.6.1)型的算子在区域Ω内满足下列条件：

1) 在任意紧集$K\subset\Omega\backslash M$上，算子组$\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$的秩为$m$；这里$M$是在有限个$(m-1)$维光滑流形$\mathfrak{M}$中的某个有界集，并且集合$M$的闭包在$\Omega$内。

2) 在每一点$x\in M$上，满足不等式

$$a^{kj}n_kn_j+a^{kj}\varphi_{x_kx_j}+b^k\varphi_{x_k}>0$$

其中n是曲面$\mathfrak{M}$在点x的法向量，而且$\varphi(x_1,\cdots,x_m)=0$是$\mathfrak{M}$在点$x$的邻域内的方程，其中$\mathrm{grad}\varphi\neq 0$。

那么在$D'(\Omega)$中，使得$Lu\in\mathscr{H}_s^{\mathrm{loc}}(\Omega)$的每个广义函数$u$满足估计

$$\|\varphi u\|_\gamma^2\leqslant C_\gamma\{\|\varphi_1Lu\|_s^2+\|\varphi_1u\|_\gamma^2\} \tag{2.6.57}$$

其中函数$\varphi,\varphi_1\in C_0^\infty(\Omega)$，而且在$\mathrm{supp}\varphi$上$\varphi_1=1$；此外，或者在$M$上$\varphi\equiv 1$或者$\mathrm{supp}\varphi\cap M=\varnothing$。这里$\gamma=\mathrm{const}<s$。

满足条件1)和2)的微分算子L在Ω内是整体亚椭圆的。

证明 定理2.6.3的证明完全类似于定理2.5.3的证明。为了证明定理2.4.2的条件I，II和$\mathrm{III_b}$成立，我们完全跟证明定理2.5.3一样来进行，得到估计

$$\|u\|_0^2\leqslant\frac{C_1}{\mu^2}\|Lu\|_0^2,\quad u\in C_0^\infty(G_\beta) \tag{2.6.58}$$

其中C_1与μ无关，而且常数μ可以选取任意大。

从表达式(2.6.52)和(2.6.53)得到：

$$\sum_{j=1}^m(\|L^{(j)}u\|_0^2+\|L_{(j)}u\|_{-1}^2)\leqslant C_2\{\|L^{0(j)}u\|_0^2+\|L_{(j)}^0u\|_{-1}^2+\|u\|_0^2\} \tag{2.6.59}$$

由(2.6.6)和(2.6.9)，我们得到

$$\sum_{j=1}^m\|L^{0(j)}u\|_0^2\leqslant C_3\{\|Lu\|_0\|u\|_0+\|u\|_0^2\}$$

从不等式 (2.6.14) 得到:

$$\|L^0_{(j)}u\|^2_{-1} \leqslant 2\|E_{-1}L^0_{(j)}u\|^2_0 + C_4\|u\|^2_0 \leqslant 2\|L^0_{(j)}E_{-1}u\|^2_0 + C_5\|u\|^2_0$$

$$\leqslant C_6\left\{\sum_{i=1}^{m}\|LD_iE_{-1}u\|_0\|D_iE_{-1}u\|_0 + \|u\|^2_0\right\}$$

从最后这一不等式并利用引理 2.6.3，我们推出

$$\|L^0_{(j)}u\|^2_{-1} \leqslant C_7\{\|u\|^2_0 + \|u\|_0\|Lu\|_0\}$$

再考虑到 (2.6.58)，得到

$$\|L^{(j)}u\|^2_0 + \|L_{(j)}u\|^2_{-1} \leqslant C_8\{\|u\|^2_0 + \|u\|_0\|Lu\|_0\} \leqslant \frac{C_9}{\mu}\|Lu\|^2_0$$

其中 $u \in C_0^\infty(G_\beta)$.

完全跟证定理 2.5.3 一样，由此及 (2.6.58)推得：在定理 2.6.3 的条件下，定理 2.4.2 的条件 I，II 和 III_b 成立。

下面是定理 2.6.3 的一个推论。

定理 2.6.4 假设对于 $\Omega\backslash x^0$ 内的每一紧集 K，算子组 $\{Q_0, \cdots, Q_{2m}\}$ 的秩为 m，并且假设在点 x^0 上成立不等式

$$\sum_{j=1}^{m}(|a^j| + |b^j|) > 0.$$

则算子 L 在 Ω 内是亚椭圆的，并且对于每一紧集 $K\subset\Omega$ 和每一个使得 $\phi Lu \in \mathscr{H}_s(\Omega)$（对于任意的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$）的广义函数 $u \in D'(\Omega)$，不等式 (2.6.57) 成立.

定理 2.6.4 的证明类似于定理 2.5.4 的证明。

我们注意到：为了使定理 2.6.4 成立，在点 x^0 上 $\Sigma_1^m(|a^{jj}| + |b^j|) \neq 0$ 的条件是本质的。事实上，函数 $u = |x|^\nu (\nu > 0)$ 满足方程

$$|x|^2\Delta u - (\nu m + \nu(\nu - 2))u = 0 \qquad (2.6.60)$$

其中 $|x|^2 = \Sigma_1^m x_j^2$. 如果数 ν 不是整数，则显然方程 (2.6.60) 在包含原点的区域 Ω 内不是亚椭圆的.

基于定理 2.6.4，容易看到方程

$$a(x)\Delta u + u_{x_1} = 0$$

在包含原点的区域Ω内是亚椭圆的，其中$a(x)\in C_0^\infty(R^m)$，$|x|\neq 0$时$a(x)\gneq 0$，而且对于一切$\alpha(|\alpha|\geq 0)$ $a^{(\alpha)}(0)=0$.

由于定理 2.5.2 和 2.6.2，方程

$$D_1^2u+x_1^{2k}D_2^2u+ix_1^lD_3u=0,\qquad k,l\geq 0$$

是亚椭圆的.

方程

$$D_1^2u+(a_1(x_1)+a_2(x_2))D_2^2u=0$$

在区域$|x_1|^2+|x_2|^2\leq 2$内是全亚椭圆的(基于定理 2.6.2)，其中$a_1(x_1)$和$a_2(x_2)$属于$C^\infty(R^1)$，在$x_1\neq 0$时$a_1(x_1)>0$；$a_1(0)=0$；在$|x_2|>1$时$a_2(x_2)>0$而$|x_2|\leq 1$时$a_2(x_2)=0$.

注 可以构造一类形如(2.6.1)的方程，其左端不能表示为(2.5.1)的形式．下面给出的构造是基于 Hilbert 的一个定理．在[48](也可参看[47])中，Hilbert 构造一个含有两个变量的六次多项式$P(x,y)$，它不可能表示为有限项多项式平方和的形式．

我们令

$$A(x,y,z)=z^6P\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)+P_1(x,y,z)\qquad(2.6.61)$$

其中P_1是一个无限次可微函数，它及其所有直到6阶导数在$x=y=z=0$处都等于0.

引理 2.6.5 由(2.6.61)给定的无限次可微函数$A(x,y,z)$在原点的任意邻域内不可能表示为有限项无限次可微函数的平方和的形式．

证明 若不然，假设方程

$$A(x,y,z)=\sum_{j=1}^{N}A_j^2(x,y,z)\qquad(2.6.62)$$

在原点的一个邻域Ω内成立，其中A_j是在Ω内无限次可微的函数．我们把A_j表示为部分 Taylor 级数展开式

$$A_j=\sum_{|\alpha|\leq 3}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}A_j(0,0,0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}+R_{j,3}\qquad(2.6.63)$$

其中函数$R_{j,3}$及其直到三阶导数在原点为0.

从 (2.6.62) 容易得出，在原点上 $|\alpha| \leqslant 2$ 的导数 $\partial^{|\alpha|}A_j/\partial\bar{x}^\alpha$ $(\bar{x} = (x, y, z))$ 都等于0，而且

$$z^6 P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^{|\alpha|}A_j(0,0,0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}} x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}\right]^2 \tag{2.6.64}$$

在 (2.6.64) 中置 $z = 1$，我们得到：Hilbert 多项式 $P(x, y)$ 表示为有限项多项式平方和形式的一个表达式，这是不可能的．引理证毕．

引理 2.6.5 是 L. Hörmander 和 V. P. Palamodov 告诉我们的．从这个引理可以得到：形如

$$L(u) = A\Delta u + Qu \tag{2.6.65}$$

的算子在原点的任意邻域内不可能表示为形式(2.5.1)．这里Q是系数无限次可微的任意一阶微分算子．事实上，如果

$$-(A\Delta u + Qu) = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 u + iX_0 u + cu \tag{2.6.66}$$

那么，由等式 (2.6.66) 右端与左端二阶导数的系数推得，对于 $k = 1, \cdots, m$，有

$$A(x, y, z) = \sum_{j=1}^{r} (a_j^k)^2$$

由于引理 2.6.5，这是不可能的．容易给出 (2.6.65) 形式的算子的例子，此算子在原点的一个邻域中满足定理 2.6.2 的条件，因此它是亚椭圆的．

令 $A(x, y, z) = z^6 P(x/z, y/z)$，并且假定$Q$是这样的一个常系数一阶算子：对于某个 k，在原点上 $(Q)^k A \neq 0$．则算子(2.6.65)在原点的一个充分小邻域内满足定理 2.6.2 的条件．

事实上，在这种情况下

$$L^{0(j)} = 2A(x, y, z)D_j$$

而且容易验证，对于 $|I| = 2k + 1$，形式为

$$Q_I^j = \mathrm{ad}Q \cdots \mathrm{ad}Q\, L^{0(j)} = 2(Q)^k A \cdot D_j$$

的换位子具有象征 $Q_i^j(x,y,z,\xi)=2(Q)^k A\cdot\xi_j$. 从而对于原点的一个充分小邻域$\Omega$内的所有点$(x,y,z)$

$$\sum_{j=1}^{m}|Q_i^j(x,y,z,\xi)|^2+1\geqslant C_0(1+|\xi|^2) \qquad (2.6.67)$$

其中 $C_0=\text{const}>0$. 从关系式(2.6.67)推出，在Ω内定理2 6.2的假设是满足的。

§7. 在非光滑区域第一边值问题的解。M. B. Келдыш 方法

对于满足定理2.5.2，2.5.3，2.6.2或2.6.3的条件的亚椭圆方程，可以用 M. B. Келдыш 方法构造在非光滑区域的第一边值问题的解，它基于闸函数的应用. Келдыш[63]用这种方法最先研究方程(1.1.4)在区域内点是椭圆型的边值问题(1.1.4)，(1.1.5)。

引理 2.7.1 假设$\Omega_n(n=1,\cdots)$是这样的区域序列：$\bar{\Omega}_n\subset\Omega_{n+1}\subset\Omega$，区域$\Omega_n$的边界$S_n$对于某充分大的$k$属于$A^{(k)}$类，并且在$\Omega$内的任意闭集属于所有(从某$n$开始)的区域$\Omega_n$. 设$g$是在$\bar{\Omega}$内的连续函数，而$f$在$\Omega$内有界. 假设满足下列条件：

1) 方程

$$L_\varepsilon(u)=\varepsilon\Delta u+L(u)=f\ (\text{在 }\Omega_n\text{ 内}),\ \varepsilon>0 \qquad (2.7.1)$$

具条件

$$u_{\varepsilon,n}|S_n=g \qquad (2.7.2)$$

的解$u_{\varepsilon,n}$在空间$C^{(s)}(\bar{\omega})$中形成一个紧集(这里$s\geqslant 2$而且$\bar{\omega}$是包含在Ω内的任意闭集)，其中在$\bar{\Omega}$上

$$L(u)=a^{kl}u_{x_kx_l}+b^k u_{x_k}+cu,\ c<0,\ a^{kl}(x)\xi_k\xi_l\geqslant 0$$

2) 对于Ω的边界Σ的某集合Σ'的每一点P_1，存在一个闸函数，即满足如下条件的一个函数$V(x)$：a) $V(x)$在区域$\omega_1=\Omega\cap O(P_1)$的闭包中定义且连续，其中$O(P_1)$是点$P_1$的某邻域，并且$V(x)$属于$C^{(2)}(\omega_1)$类；b) $V(P_1)=0$而且在$\bar{\omega}_1$的其余点

上 $V > 0$; c) 在 ω_1 内 $L(V) < C_1 = \text{const} < 0$.

3) 在 $\Omega \cap \Sigma'$ 内存在这样一个 $C^{(2)}(\Omega)$ 类的连续函数 W: 在 $\Omega \cup \Sigma'$ 内 $W \geqslant 0$, 在 Ω 内 $L(W) < 0$, 且当 $x \to \Sigma \backslash \Sigma'$ 时 $W(x) \to \infty$. 这就是说, 如果 x 在集合 $\Sigma \backslash \Sigma'$ 的 δ 邻域内, 而 δ 充分小, 则 $W(x) > N$, 这里 N 是任意的.

则方程 $L(u) = f$ 在 Ω 中存在一个唯一的有界解, 它在 $\Omega \cup \Sigma'$ 中连续, 在 Σ' 上与函数 g 重合, 而且属于 $C^{(s)}(\Omega)$ 类.

证明 根据极大值原理, 问题(2.7.1), (2.7.2)的解 $u_{\varepsilon,n}$ 关于 ε 和 n 一致有界. 从函数 $u_{\varepsilon,n}$ 的集合中, 我们选取 $\varepsilon \to 0$ 和 $n \to \infty$ 时依空间 $C^{(s)}(\Omega_1)$ 的范数收敛的一个序列. 我们再从这个序列中选取一个依空间 $C^{(s)}(\Omega_2)$ 的范数收敛的子序列, 等等. 对角线序列 u_{ε_k,n_k} 当 $n_k \to \infty$ 和 $\varepsilon_k \to 0$ 时对于每个 $l \geqslant 1$ 在 $\bar{\Omega}_l$ 上一致收敛. 序列直到 s 阶的导数同样是一致收敛的. 显然, 极限函数 $u(x)$ 属于 $C^{(s)}(\Omega)$ 类, 在 Ω 内有界并且满足方程 $L(u) = f$.

我们证明: $u(x)$ 在 Σ' 上趋于一极限, 并且等于函数 g. 假定 P_1 是 Σ' 上的任意一点, 而 h_γ 是中心在 P_1 半径为 γ 的球; 假设 γ 充分小使得这个球的所有点 x 都属于 $\bar{\Omega}$, 并且满足 $|g(x) - g(P_1)| < \delta$, 其中 $\delta > 0$ 是某个给定数而且 $h_\gamma \subset O(P_1)$.

在区域 $\Omega_n \cap h_\gamma$ 内, 我们考虑函数

$$w_\pm(x) = \pm g(P_1) + \delta \mp u_{\varepsilon,n} + CV(x), \quad C = \text{const} > 0$$

容易看出, 在 $\Omega_n \cap h_\gamma$ 内

$$L_\varepsilon(w_\pm) = \pm cg(P_1) + c\delta \mp f + C(\varepsilon \Delta V + L(V))$$

因为在 ω_1 内 $L(V) < C_1 < 0$, 并且对于很小的 γ, $\omega_1 \supset \Omega_n \cap h_\gamma$, 当 ε 充分小时, 我们可以选取 C 充分大, 使得在 $\Omega_n \cap h_\gamma$ 内 $L_\varepsilon(w_\pm) < 0$. 对于这样的选取, 虽然 ε 依赖于 n, 但是 C 与 ε 或 n 无关. 在 $\Omega_n \cap h_\gamma$ 的边界上, 函数 $w_\pm(x)$ 非负. 事实上, 在 S_n 的点上, 由于 δ 和 γ 的限制, 有

$$w_\pm(x) = \pm g(P_1) + \delta \mp g(x) + CV(x) > 0$$

而且对于在半径为 γ 的球内的那部分边界的点上, 对于充分大的 C 有 $w_\pm > 0$, 这是因为在这些点上, $V > C_2 > 0$ 而且函数 $u_{\varepsilon,n}$ 关

于 ε 和 n 一致有界．根据在区域 $\Omega_n\cap h_\gamma$ 内 $L_\varepsilon(w_\pm)<0$，$c<0$ 而且在其边界上 $w_\pm>0$ 的条件，由极大值原理推得：在 $\Omega_n\cap h_\gamma$ 内 $w_\pm>0$．由此推出，对于 $\Omega_n\cap h_\gamma$ 内的一切 x，有

$$|u_{\varepsilon,n}(x)-g(P_1)|\leqslant\delta+CV(x) \qquad (2.7.3)$$

因为 C 与 ε 或 n 无关，我们可以选取一个序列 ε_k，n_k，使得当 $\varepsilon_k\to 0$ 和 $n_k\to\infty$ 时，$u_{\varepsilon_k,n_k}\to u(x)$，并且当 $\varepsilon_k\to 0$ 和 $n_k\to\infty$ 时，可以在 (2.7.3) 取极限．因此对于一切 $x\in\Omega\cap h_\gamma$，得到

$$|u(x)-g(P_1)|\leqslant\delta+CV(x) \qquad (2.7.4)$$

常数 δ 是任意的，而且 C 依赖于 δ，因此从 (2.7.4) 推出：当 $x\to P_1$ 时，$u(x)\to g(P_1)$（因为 $V(x)\to 0$）．

我们现在证明：在 $\Omega\cup\Sigma'$ 内连续，在 Σ' 上等于 g，并且满足方程

$$L(u)=f\ (\text{在}\ \Omega\ \text{内}),\quad u\in C^{(2)}(\Omega)$$

的有界函数 $u(x)$ 是唯一的．

如果存在两个具有上述性质的函数，则它们的差 $v(x)$ 在 Σ' 上应等于 0，而且在 Ω 内应满足 $L(v)=0$，并且 $|v|\leqslant K_0$，$K_0=\text{const}$．在 Ω 内我们考虑函数 $\delta w\pm v$，$\delta=\text{const}>0$．这些函数在区域 $\Omega\backslash G_\kappa$ 的边界上是非负的，其中 G_κ 是 κ 充分小时集合 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 的 κ 邻域．这是从在 Ω 内 $w\geqslant 0$ 而在 Σ' 上 $v=0$ 并且当 $x\to\Sigma\backslash\Sigma'$ 时 $w(x)\to\infty$ 这一事实推得的．此外，我们有

$$L(\delta w\pm v)<0,\ \text{在}\ \Omega\backslash G_\kappa\ \text{内}$$

因此根据极值原理，在 $\Omega\backslash G_\kappa$ 内 $\delta w\pm v\geqslant 0$，所以在 $\Omega\backslash G_\kappa$ 的点上 $|v|\leqslant\delta w$．假设 x 是 Ω 内的任意点．显然对于一切充分小的 κ，$x\in\Omega\backslash G_\kappa$．因为 δ 是任意的，在点 x 上不等式 $|v|\leqslant\delta w$，实际上就推出了 $v(x)=0$，即在 Ω 内 $v\equiv 0$．引理证毕．

我们现在来考虑方程 $Lu=-Pu=f$ 的第一边值问题，其中 P 是 (2.5.1) 型算子．

定理 2.7.1 假设算子组 $X_0,\cdots,X_r$ 在区域 Ω 内的每一点 x 上的秩为 m，并且在 Ω 内 $-\gamma=c<\text{const}<0$．假设函数 f 有界并且 $f\in\mathscr{H}_s^{\text{loc}}(\Omega)$，其中 $2(s-k)>m$ 而 $k\geqslant 2$．假设边界 Σ 的

一部分 Σ' 具有如下性质：每一点 $P_1\in\Sigma'$ 都有一个邻域，在此邻域内区域 Ω 包含在某 $A^{(2)}$ 类区域 $\tilde{\Omega}$ 内，关于它 P_1 位于 $\Sigma_3\cup\Sigma_2$ 型的集合内，并且在 Σ_2 的点上 $\beta<0$，其中 β 是关于算子 $L=-P$ 按(1.5.6)定义的函数．假设：或者 $\overline{\Sigma\backslash\Sigma'}\cap\Sigma'=\varnothing$，而且集合 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 是 $A^{(2)}$ 类区域的边界，并且 $\Sigma\backslash\Sigma'\subset\Sigma_0\cup\Sigma_1$，或者对于适当选取的坐标 $y_1,\cdots,y_m$，集合 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 在平面 $y_m=0$ 内并且 $\Sigma\backslash\Sigma'=\Sigma_0\cup\Sigma_1$，对于 $\Omega\cap\Sigma'$ 内的一切点 $y_m>0$．则方程

$$Lu=f,\ 在\ \Omega\ 内 \tag{2.7.5}$$

存在一个唯一的有界解 $u(x)$，使得 $u\in\mathscr{H}_s^{\text{loc}}(\Omega)$，$u\in C^{(k)}(\Omega)$ 并且 $u(x)$ 在 Σ' 上连续，而在 Σ' 上取给定连续函数 g 的值．

证明 在定理的条件下，我们来验证：区域 Ω 和方程(2.7.5)满足引理 2.7.1 的所有假设．首先我们证明：如果在边界点 P_1 附近，边界 Σ 的那部分是一个 $A^{(2)}$ 类区域的边界，并且属于 $\Sigma_3\cup\Sigma_2$(在 Σ_2 的点上有 $\beta<0$)，则对于点 P_1，存在一个闸函数 $V(x)$．为此目的，在点 P_1 的邻域内我们引进局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得边界 Σ 位于平面 $y_m=0$ 上，而且在 Ω 内 $y_m>0$．对于新坐标，方程(2.7.5)取如下形式

$$Lu=\alpha^{kj}u_{y_ky_j}+\beta^ku_{y_k}+cu=f$$

由于我们的假设，在点 P_1 的充分小邻域内，或者 $\alpha^{mm}>0$，或者 $\beta=\beta^m<0$；此外，$c<0$．假设 $\phi(y_1,\cdots,y_{m-1})$ 是在 P_1 点的 2δ 邻域内(δ 充分小)的那部分 Σ 上定义的光滑函数，并且具有性质：在点 P_1 上 $\phi=1$，在 P_1 的 δ 邻域外 $\phi=0$，而且在其余点 $0<\phi<1$．在区域 $Q_{\delta,\tau}\{0<y_m<\tau\phi\}$ 中，我们考虑函数 $V=e^{\kappa\tau}-e^{\kappa(\tau\phi-y_m)}$，其中 κ，$\tau=\text{const}>0$．显然 $V(P_1)=0$，而在 $x\neq P_1$ 时 $V(x)>0$，并且 $V\in C^{(2)}(Q_{\delta,\tau})$．因为对于坐标 $x_1,\cdots,x_m$，在 P_1 的邻域内区域 Ω 的边界 Σ 是 $A^{(2)}$ 类区域的边界，由此推得 α^{kj} 和 β^k 是有界的．我们需要验证 $L(V)<0$．如果选取 τ 充分小而 κ 充分大，则有

$$L(V)=-e^{\kappa(\tau\phi-y_m)}\Big[\alpha^{mm}\kappa^2+\sum_{k,j=1}^{m-1}(\alpha^{kj}\kappa^2\tau^2\phi_{y_k}\phi_{y_j}+\alpha^{kj}\kappa\tau\phi_{y_ky_j})$$

$$-2\sum_{k=1}^{m-1}\alpha^{km}\kappa^2\tau\phi_{y_k}+\sum_{k=1}^{m-1}\beta^k\kappa\tau\phi_{y_k}-\beta^m\kappa+c\Big]+ce^{\kappa\tau}<0$$

由定理 2.7.1 的假设，在 Σ' 上的每一点 P_1 的某邻域内，区域 Ω 包含在某区域 $\tilde{\Omega}$ 内，对于 $\tilde{\Omega}$，我们在点 P_1 上可以构造一个闸函数 $V(x)$. 显然，上面所述的函数 $V(x)$ 也可以作为在点 P_1 关于区域 Ω 的闸函数，因此对于区域 Ω 引理 2.7.1 的条件2)是满足的.

我们定义这样一个函数 W：在 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 的 δ 邻域外等于正常数 K，而在此邻域内由下面的方程给定（这里 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 在平面 $y_m=0$ 上）：

$$W=-\ln y_m\cdot h(y_m)+K$$

其中对于 $0\leqslant y_m\leqslant\delta/2$ 有 $h(y_m)=1$，$y_m\geqslant\delta$ 时 $h(y_m)=0$，$h(y_m)$ 是一个光滑的函数，并且 $0\leqslant h(y_m)<1$. 则

$$\begin{aligned}L(W)\equiv\alpha^{kj}W_{y_ky_j}+\beta^kW_{y_k}+cW&=\alpha^{mm}y_m^{-2}\cdot h(y_m)\\&-2\alpha^{mm}y_m^{-1}h'(y_m)-\alpha^{mm}\ln y_m\cdot h''(y_m)-\beta^my_m^{-1}h(y_m)\\&-\beta^m\ln y_mh'(y_m)+Kc-\ln y_m\cdot h(y_m)\cdot c\end{aligned}$$

如果在 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 的邻域内 $\alpha^{mm}=O(y_m^2)$，因为 $\beta^m\geqslant0$ 而且 $c<0$，则对于充分大的 K，我们得到 $L(W)<0$. 如果 $\alpha^{mm}=O(y_m)$，则由假设 $\alpha^{mm}_{y_m}-\beta^m\leqslant0$，从而对于充分大的 K 有 $L(W)<0$.

如果 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 是满足 $\overline{\Sigma\backslash\Sigma'}\cap\Sigma'=\varnothing$ 的一支边界分支，则函数 W 由如下方程来定义：

$$W(x)=-\ln r\cdot h(r)+K$$

其中 r 是点 x 到 $\Sigma\backslash\Sigma'$ 的距离，而且 $h(r)$ 是上面定义的函数. 容易看出对于充分大的 K 和充分小的 δ，函数 W 满足引理 2.7.1 的条件 3).

现在对 $L(u)=-P(u)$ 的情况我们来证明引理 2.7.1 的条件 1)是满足的. 由假设，对于区域 Ω 的每一点 x，对应于算子 P 的算子组 $X_0,\cdots,X_r$ 具有秩 m. 因为对于 (2.7.1) 算子 $\varepsilon\partial/\partial x_j$ $(j=1,\cdots,m)$，$X_0,\cdots,X_r$ 的对应组包含算子 $X_0,\cdots,X_r$，由定理 2.5.2，我们有

$$\|\varphi u\|^2_{s+\delta}\leqslant C(\omega,s)\{\|\varphi_1L_\varepsilon u\|^2_s+\|\varphi_1u\|^2_0\}\qquad(2.7.6)$$

其中 $\delta = \text{const} > 0$，函数 $\varphi, \varphi_1 \in C_0^\infty(\omega)$，$\bar{\omega} \subset \Omega$，在 φ 的支集的邻域内 $\varphi_1 = 1$，函数 $u \in D'(\Omega)$ 并且 $L_\varepsilon(u) \in \mathscr{H}_s^{\text{loc}}$，而常数 C 与 ε 无关。把对于 $n \geqslant n_0$ 的函数 $u_{\varepsilon,n}$ 代入 (2.7.6)，这些函数就是问题 (2.7.1)，(2.7.2) 的解。对于充分大的 n_0，得到

$$\|\varphi u_{\varepsilon,n}\|_{s+\delta}^2 \leqslant C(\omega, s)\{\|\varphi_1 f\|_s^2 + \|\varphi_1 u_{\varepsilon,n}\|_0^2\} \qquad (2.7.7)$$

其中 $\delta = \text{const} > 0$。

因为 $f \in \mathscr{H}_s^{\text{loc}}$ 并且根据极大值原理 $u_{\varepsilon,n}$，在 Ω 内关于 ε 和 n 一致有界，从 (2.7.7) 得到

$$\|\varphi u_{\varepsilon,n}\|_{s+\delta} \leqslant C_1$$

其中 C_1 与 ε 或 n 无关。从 Соболев 定理（见定理 2.1.11）推出函数族 $\varphi u_{\varepsilon,n}$ 在空间 $\mathscr{H}_s$ 中是列紧的。从定理 2.1.8 推出：如果 $2(s-k) > m$，则函数族 $\varphi u_{\varepsilon,n}$ 在空间 $C^{(K)}(\omega)$ 是列紧的。

因为 φ 是在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的任意函数，我们知道 $u_{\varepsilon,n}$ 满足引理 2.7.1 的条件 1)。从而定理证毕。

注 1 对于算子 L 满足定理 2.6.1 的假设的情况，定理 2.7.1 也是正确的。对于这种情况，为了得到 (2.7.7) 型的估计，我们必须利用定理 2.6.2 中证明过的对 $s \geqslant 0$ 的不等式

$$\varepsilon^2\|\varphi u\|_{s+2}^2 \leqslant C_1\{\|\varphi_1 L_\varepsilon u\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_s^2\}, u \in \mathscr{H}_{s+2}^{\text{loc}}, \quad L_\varepsilon(u) \in \mathscr{H}_s^{\text{loc}} \qquad (2.7.8)$$

和估计

$$\|\varphi u\|_{s+\delta}^2 \leqslant C_2\{\|\varphi_1 L_\varepsilon u\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_s^2\}, \quad \delta = \text{const} > 0 \qquad (2.7.9)$$

其中 φ，$\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ 并且在 $\operatorname{supp}\varphi$ 上 $\varphi_1 \equiv 1$。因为 $L(u) = L_\varepsilon(u) - \varepsilon\Delta u$，所以

$$\|\varphi u\|_{s+\delta}^2 \leqslant C_3\{\|\varphi_1 L_\varepsilon u\|_s^2 + \varepsilon^2\|\varphi_1 \Delta u\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_s^2\} \qquad (2.7.10)$$

从估计 (2.7.10) 和 (2.7.8) 容易导出一个 (2.7.6) 型的不等式。不等式 (2.7.8) 可以用类似推导 (2.6.3) 的步骤来获得。

第一章 §8 的方法可以用来研究：在闭区域 $\bar{\Omega}$ 内满足定理 2.5.3 或2.6.3的条件的亚椭圆方程的问题 (1.1.4)，(1.1.5) 的弱解的光滑性。显然，这些定理的一个推论是：在区域 Ω 的任意子区域内，满足定理 2.5.3 或 2.6.3 假设的第一边值问题的广义解是局部光滑

的.

§8. 具解析系数二阶偏微分算子的亚椭圆性*)

我们来研究算子 (2.6.1) 的系数是实解析函数的情况. 此时, 算子 (2.6.1) 与 (2.5.1) 亚椭圆性的充分必要条件可以用简单的方式来阐述. 在我们的论述中, 下面关于解析向量场的引理 (参看 [145], [146]) 起很重要的作用.

假设 $Y_1(x), \cdots, Y_l(x)$ 是在空间 R^m 中的区域 Ω 内给定的解析向量场, 即 $Y_j(x) = (a_j^1(x), \cdots, a_j^m(x))$, 其中 $a_j^s(s = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, l)$ 是在 Ω 内的解析函数. 用 Y_j 表示对应于向量场 $Y_j(x)$ 的微分算子

$$Y_j \equiv \sum_{s=1}^{m} a_j^s(x) \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad x \in \Omega$$

对于每一多重指标 $I = (\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$, 我们定义微分算子 $Y_I = \mathrm{ad} Y_{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad} Y_{\alpha_{t-1}} Y_{\alpha_t}$, 其中对于 $s = 1, \cdots, t, \alpha_s = 1, \cdots, l$. 我们用 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 表示在 Ω 内具解析系数的算子 Y_I 的所有可能的线性组合的集合.

在点 x^0 上, 在集合 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 中线性独立算子的最大数目定义为算子组 $\{Y_1, \cdots, Y_l\}$ 在点 x^0 的秩.

引理 2.8.1 假设 $Y_1(x), \cdots, Y_l(x)$ 是给定在空间 R^m 的区域 Ω 内的解析向量场, 并且假设在点 $x^0 \in \Omega$ 上算子组 $\{Y_1, \cdots, Y_l\}$ 的秩为 k, 其中 $1 \leqslant k < m$. 则在点 x^0 的邻域内, 存在一个 k 维解析流形 V, 使得 $x^0 \in V$ 且在此流形的每一点上, 对应于 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 的算子的所有向量在此点切于 V.

证明 假设 x^0 是原点. 我们先证在 x^0 的邻域 U_0 内, 存在一个由解析函数 F_s 给定的非退化坐标变换

$$y_s = F_s(x_1, \cdots, x_m), \quad s = 1, \cdots, m \tag{2.8.1}$$

---

*) 英译本注: 应作者的要求, 在译本中增加这一节, 由他们最近的综合论文[98]的最后 8 页或 9 页组成, 仅仅作少许改变.

并且存在属于 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 的 k 个微分算子 $Y_{l_1}, \cdots, Y_{l_k}$,使得对于新坐标 y,这些算子可以表示为形式

$$Y_{l_j} = e_j + \sum_{s=1}^{j-1} y_s Y_j^s, \quad j = 1, \cdots, k \tag{2.8.2}$$

其中 $e_j = \partial/\partial y_j$ 而 Y_j^s 是在点 x^0 的邻域内对应于解析向量场的某算子. 因为在点 x^0 上算子组 $\{Y_1, \cdots, Y_l\}$ 的秩等于 $k \geqslant 1$,我们知道,存在一个向量场 $Y_{l_1}(x)$,使得$Y_{l_1}(0) \neq 0$,并且 $Y_{l_1} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$. 对这种情况,容易证明:在点 x^0 的邻域 U_1 内存在一个(2.8.1)形式的解析坐标变换,使得在此邻域内 $Y_{l_1} \equiv \partial/\partial y_1$. 因此,如果 $k = 1$,则得关系式(2.8.2). 如果 $k > 1$,则显然存在一个向量场 $\tilde{Y}_{l_2}(y)$,使得 $\tilde{Y}_{l_2} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$,并且 $\tilde{Y}_{l_2} = q_2^1(y) e_1 + Y_{l_2}$, $Y_{l_2}(0) \neq 0$,其中 $Y_{l_2}(y)$ 在点 x^0 的某邻域 U_2 的所有点上正交于 $e_1(y)$. 显然 $Y_{l_2} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$,并且在 x^0 的某邻域 U_3 内,有

$$Y_{l_2}(y) = Y_{l_2}(0, y_2, \cdots, y_m) + y_1 Y_2^1(y)$$

其中 $Y_2^1(y)$ 是一解析向量场. 在空间 $y_2, \cdots, y_m$ 中,我们作一个坐标变换 $y' = y_j'(y_2, \cdots, y_m)$, $j = 2, \cdots, m$,对此相应于向量场 $Y_{l_2}(0, y_2, \cdots, y_m)$ 的算子变换成 $e_2 = \partial/\partial y_2'$. 所以在新坐标 $y_1' = y_1$, $y_j' = y_j'(y_2, \cdots, y_m)$ $(j = 2, \cdots, m)$中(我们仍用 y 表示),有

$$Y_{l_1} = e_1, \quad Y_{l_2} \equiv e_2 + y_1 Y_2^1$$

对于 $k > 2$ 的关系式(2.8.2)将用归纳法证明. 假设我们已经选取坐标系 $y_1, \cdots, y_m$,并且从 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 选取 s 个算子,使得

$$Y_{l_j} = e_j + \sum_{\rho=1}^{j-1} y_\rho Y_j^\rho, \quad j = 1, \cdots, s \tag{2.8.3}$$

其中,$e_j = \partial/\partial y_j$ 而 $Y_j^\rho(y)$ 是解析向量场. 现在我们证明:如果 $s < k$,则对于 $s + 1$,(2.8.3)同样也成立. 根据引理的假设,在 x^0 的邻域内存在一个向量场 $\tilde{Y}_{l_{s+1}}(y)$,使得 $\tilde{Y}_{l_{s+1}} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$,

并且

$$\tilde{Y}_{l_{s+1}} = \sum_{j=1}^{s} q^j_{s+1}(y) e_j + Y'_{s+1} \qquad (2.8.4)$$

其中对于 $j \leqslant s$, $Y'_{s+1}(y)$ 正交于 $e_j(y)$, q^j_{s+1} 是解析函数并且 $Y'_{s+1}(0) \neq 0$. 由 Taylor 公式,有

$$Y'_{s+1}(y) = Y'_{s+1}(0, \cdots, 0, y_{s+1}, \cdots, y_m) + \sum_{j=1}^{s} y_j Y'_{j,s+1}(y)$$

其中 $Y'_{j,s+1}$ 是某解析向量场. 在 $y_{s+1}, \cdots, y_m$ 平面内, 我们引进坐标变换,在此坐标变换下对应于向量场 $Y'_{s+1}(0, \cdots, 0, y_{s+1}, \cdots, y_m)$ 的算子变为 $e_{s+1} = \partial/\partial y'_{s+1}$. 因此从不等式 (2.8.4) 推出在新坐标下(我们仍记为 y),有

$$\tilde{Y}_{l_{s+1}} = \sum_{j=1}^{s} q^j_{s+1}(y) e_j + e_{s+1} + \sum_{j=1}^{s} y_j Y'_{j,s+1} \qquad (2.8.5)$$

利用等式 (2.8.3) (由归纳法假设此等式成立)来表示 $j \leqslant s$ 的 e_j, 从 (2.8.5) 得到

$$Y_{l_{s+1}} = e_{s+1} + \sum_{j=1}^{s} y_j Y^j_{s+1}$$

其中 $Y_{l_{s+1}} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$, 并且 $Y^j_{s+1}(y)$ 是在 x^0 的邻域内的某个解析向量场. 这就是所求的结果.

在 y 坐标中超平面 $E^k = \{y_{k+1} = 0, \cdots, y_m = 0\}$ 是一流形 V,对于它关系式 (2.8.2) 成立.为此我们证明: 如果 Y_l 是 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 中关于坐标 y 的任意算子,则对于 $j \geqslant k+1$ 的 $e_j(y)$ 与 $Y_l(y)$ 的内积在 E^k 属于 x^0 的某邻域的点上等于 0. 因为 $f(y) = (e_j(y), Y_l(y))$ 是 y 的解析函数, 所以只需要证明这个函数关于 $y_1, \cdots, y_k$ 的一切导数在原点都等于 0 就够了.

我们证明在点 x^0 的某邻域 U_0 内,

$$\frac{\partial f}{\partial y_s} = (e_j(y), Y^s_l(y)) + \sum_{p=1}^{s-1} y_p A^p_s, \ j \geqslant k+1, s \leqslant k \qquad (2.8.6)$$

其中 $Y^s_l \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 而 A^p_s 是某解析函数. 因为 $\mathrm{ad}\, e_1 Y_l \in \mathscr{L}$

$(Y_1, \cdots, Y_l)$，我们有

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = (e_l(y), (\mathrm{ad} e_1 Y_l)(y)) = (e_l(y), Y_l^1(y))$$

我们对 s 进行归纳．假设 (2.8.6) 对于 $s \leqslant s_0 < k$ 成立，我们证明它对于 $s = s_0 + 1$ 也成立．利用 $j = s_0 + 1$ 的关系式 (2.8.2)，得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_{s_0+1}} &= (e_l(y), (\mathrm{ad} e_{s_0+1} Y_l)(y)) \\
&= \left(e_l(y), \left(\mathrm{ad}\left(Y_{I_{s_0+1}} - \sum_{\rho=1}^{s_0} y_\rho Y^\rho_{s_0+1}\right) Y_l\right)(y)\right) \\
&= (e_l(y), (\mathrm{ad} Y_{I_{s_0+1}} Y_l)(y)) - \sum_{\rho=1}^{s_0} (e_l(y), \\
&\quad (\mathrm{ad} y_\rho Y^\rho_{s_0+1} Y_l)) \\
&= (e_l(y), Y_l'(y)) - \sum_{\rho=1}^{s_0} a_\rho (e_l(y), Y^\rho_{s_0+1}(y)) \\
&\quad - \sum_{\rho=1}^{s_0} y_\rho A_\rho
\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

其中，a_ρ 与 A_ρ 是某解析函数，而且 $Y_l' \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$．从 $j = s_0 + 1$ 的 (2.8.2) 得到

$$Y^\rho_{s_0+1} = \mathrm{ad} e_\rho Y_{I_{s_0+1}} + \sum_{\rho=1}^{s_0} y_\rho Y_{\rho, s_0+1} \tag{2.8.8}$$

其中，Y_{ρ, s_0+1} 是对应于一个解析向量场的一个算子．因此从 (2.8.7) 和 (2.8.8) 得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_{s_0+1}} &= (e_l(y), Y_l'(y)) + \sum_{\rho=1}^{s_0} a_\rho (e_l(y), (\mathrm{ad} e_\rho Y_{I_{s_0+1}})(y)) \\
&\quad + \sum_{\rho=1}^{s_0} y_\rho A_\rho'
\end{aligned}$$

其中 A_ρ' 是解析函数．因为对于 $\rho \leqslant s_0$，有

$$(e_l(y),\ (\mathrm{ad}\,e_p Y_{l_{s_0+1}})(y)) = \frac{\partial}{\partial y_p}(e_l(y),\ Y_{l_{s_0+1}}(y)) \qquad (2.8.9)$$

并且 $Y_{l_{s_0+1}} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$，从归纳假设推得 (2.8.9) 的左端可以写为形式 (2.8.6). 因此 (2.8.6) 对于 $s = s_0 + 1$ 也成立.

我们现在来证明，对于每一多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$，下面形式的等式成立：

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(y)}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_k^{\alpha_k}} = (e_l(y),\ Y_l^\alpha(y)) + \sum_{\rho=1}^{k-1} y_\rho A_\alpha^\rho \qquad (2.8.10)$$

其中 $Y_l^\alpha \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$，而 A_α^ρ 是解析函数. 对于 $|\alpha| = 1$ 此等式已经证明. 我们假设对于形如 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, 0, \cdots, 0)$，$s < k$ 的所有的 α 已经证明等式(2.8.10)，我们来证明它对于所有形如 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, 0, \cdots, 0)$ 的 α 也成立.

如果 $\alpha_{s+1} = 1$，则由归纳假设和 (2.8.6) 得到

$$\frac{\partial}{\partial y_{s+1}}\left(\frac{\partial^{|\alpha'|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_s^{\alpha_s}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_{s+1}}(e_l(y),\ Y_l^{\alpha'}(y)) + \sum_{\rho=1}^{s-1} y_\rho A_{\alpha',1}^\rho$$

$$= (e_l(y),\ Y_l^\alpha(y)) + \sum_{\rho=1}^{s} y_\rho A_\alpha^\rho$$

其中 $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, 0, \cdots, 0)$，$Y_l^{\alpha'} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$，而 $A_{\alpha',1}^\rho$ 是解析函数. 我们进一步假设对于 $p \leqslant p_0$，有

$$\frac{\partial^p}{\partial y_{s+1}^p} \frac{\partial^{|\alpha'|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_s^{\alpha_s}} = (e_l(y),\ Y_{l,p}^{\alpha'}(y)) + \sum_{\rho=1}^{s} y_\rho A_{\alpha',p}^\rho \qquad (2.8.11)$$

而证明此等式对于 $p = p_0 + 1$ 也成立. 我们有

$$\frac{\partial^{p_0+1}}{\partial y_{s+1}^{p_0+1}} \frac{\partial^{|\alpha'|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdots \partial y_s^{\alpha_s}} = \frac{\partial}{\partial y_{s+1}}(e_l(y),\ Y_{l,p_0}^{\alpha'}(y)) + \sum_{\rho=1}^{s} y_\rho \tilde{A}_{\alpha',p_0}^\rho \qquad (2.8.12)$$

其中 $Y_{l,p_0}^{\alpha'} \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$，而 $\tilde{A}_{\alpha',p_0}^\rho$ 是解析函数. 从 (2.8.12) 和 (2.8.6) 得到，对于 $p = p_0 + 1$ (2.8.11) 成立.

我们注意到，如果 $Y_j \in \mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 而且 $j \geqslant k + 1$，则

在原点 $(e_j(y), Y_l(y))=0$，这是因为在原点上对于 $j=1, \cdots, k$，$e_j(y)$ 属于对应于 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$ 的算子的向量场，按假设在原点上它们形成 $\mathscr{L}(Y_1, \cdots, Y_l)$的基。由此注及公式(2.8.10)，推得函数 $f(y)$ 关于 $y_1, \cdots, y_k$ 的一切导数在 $y=0$ 都等于 0，这就是所要的结果。

我们考虑向量场 $Q(x)$ 和 $L^{0(j)}(x)$，与之相伴的算子 Q 和$L^{0(j)}$，其中

$$L^{0(j)}(x)=(a^{j1}(x), \cdots, a^{jm}(x)),$$
$$Q(x)=(b^1(x)-a^{1k}_{x_k}(x), \cdots, b^m(x)-a^{mk}_{x_k}(x))$$

而且 $a^{kj}(x)$ 和 $b^k(x)$ 是算子 (2.6.1) 的系数。

引理 2.8.2 假设在点 $x^0\in\Omega$ 上算子组 $\{Q, L^{0(1)}, \cdots, L^{0(m)}\}$的秩为 k，其中 $1\leqslant k<m$，并且假设算子 (2.6.1) 的系数在区域Ω内解析。则存在具有解析函数 F_s 的形式 (2.8.1) 的一个自变量的变换，使得在点 x^0 的邻域内算子 (2.6.1) 可以表示为形式

$$\begin{aligned} L(u) &\equiv \alpha^{kj}(y)u_{y_ky_j}+\beta^k(y)u_{y_k}+cu \\ &=L_1(u)+L_2(u)+cu \end{aligned} \tag{2.8.13}$$

其中算子 L_1 仅包含关于变量 $y_1, \cdots, y_k$ 的微分，而在超平面 $E^k\{y_{k+1}=0, \cdots, y_m=0\}$ 上算子 L_2 的系数等于 0.

证明 根据引理 2.8.1，在点 x^0 的邻域内存在一个 k 维解析流形 V，使得 $x^0\in V$，并且在 V 的每点上，所有对应于 $\mathscr{L}(Q, L^{0(1)}, \cdots, L^{0(m)})$ 的算子的所有向量在该点上切于 V。在 x^0 的邻域内我们取一个 (2.8.1) 形式的坐标变换，使得对于新坐标 $y_1, \cdots, y_m$，流形 V 与 k 维超平面 $E^k=\{y_{k+1}=0, \cdots, y_m=0\}$ 重合。因为算子 Q 和 $L^{0(j)}(j=1, \cdots, m)$ 都属于 $\mathscr{L}(Q, L^{0(1)}, \cdots, L^{0(m)})$，从引理 2.8.1 推出，在 V 的点上有

$$(Q(x), \operatorname{grad}F_s)=0, (L^{0(j)}(x), \operatorname{grad}F_s)=0, \quad s\geqslant k+1, \quad j=1, \cdots, m \tag{2.8.14}$$

由此推出：如果或者 $s\geqslant k+1$ 或者 $j\geqslant k+1$，则在 E^k 上 $\alpha^{sj}=a^{lp}F_{sx_l}F_{jx_p}=0$. 容易看出

$$\beta^s=L(F_s)=(a^{lp}F_{sx_l})_{x_p}+(Q(x), \operatorname{grad}F_s)+cF_s$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_\nu}(a^{l\rho}F_{sx_l}F_{\nu x_\rho}) - (L^{0(\rho)}, \operatorname{grad}F_s)\frac{\partial}{\partial y_\nu}(F_{\nu x_\rho})$$

$$+ (Q(x), \operatorname{grad}F_s) + cF_s \tag{2.8.15}$$

因为在V上，在$s \geqslant k+1$时$F_s = 0$，而且(2.8.14)成立，所以在V的点上(2.8.15)的最后二项对于$s \geqslant k+1$等于0. 显然在V上对于$s \geqslant k+1$有$a^{l\rho}F_{sx_l}F_{\nu x_\rho} = 0$. 因此，如果$\nu \leqslant k$，$s \geqslant k+1$，则$\frac{\partial}{\partial y_\nu}(a^{l\rho}F_{sx_l}F_{\nu x_\rho}) = 0$. 对于$\nu \geqslant k+1$，我们有

$$|a^{l\rho}F_{sx_l}F_{\nu x_\rho}| \leqslant (a^{l\rho}F_{sx_l}F_{sx_\rho})^{1/2}(a^{l\rho}F_{\nu x_l}F_{\nu x_\rho})^{1/2} \tag{2.8.16}$$

因为对于一切的ξ有$a^{kl}\xi_k\xi_l \geqslant 0$，从估计(2.8.16)容易推出在$V$上对于$\nu$，$s \geqslant k+1$有$\operatorname{grad}(a^{l\rho}F_{sx_l}F_{\nu x_\rho}) = 0$，这表明：在$E^k$上对于$s \geqslant k+1$有$\beta^s = 0$. 引理证毕.

定理 2.8.1 如果算子(2.6.1)的系数在Ω内解析，并且在Ω内的某点x^0上算子组$\{Q, L^{0(1)}, \cdots, L^{0(m)}\}$有秩$k$(其中$1 \leqslant k < m$)，则在$\Omega$内算子$L$不是亚椭圆的.

证明 在x^0的邻域U_0内，我们选取象引理2.8.2中所指出的那样的坐标变换. 则算子(2.6.1)取(2.8.13)的形式. 我们考虑算子L^*. 显然$L^*u = L_1^*u + L_2^*u + cu$，其中$L_1^*$仅包含关于变量$y_1, \cdots, y_k$的微分，并且

$$L_2^*u = M_1u + M_2u + c_2^*u,\ \text{其中}\ M_1 = \sum_{\rho=k+1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a^{l\rho}_{y_\rho}\frac{\partial}{\partial y_l}$$

所以M_1仅包含关于$y_1, \cdots, y_k$的微分，而算子M_2的系数在E^k上都等于0. 这从如下事实推得：如果或者$l \geqslant k+1$或者$\rho \geqslant k+1$，则在E^k上$a^{l\rho} = 0$，并且如果$l, \rho \geqslant k+1$，则$\operatorname{grad} a^{l\rho} = 0$.

在超平面E^k上，我们考虑算子

$$L_V^*u = L_1^*u + M_1u + (c_2^* + c)u$$

显然与算子L_V^*共轭的算子L_V具有形式

$$L_Vu = L_1u + M_1^*u + (c_2^* + c)u$$

其中，M_1^*为一阶微分算子. 假设在某点$y^0 \in U_0$的邻域G_0内的平

面 E^k 上，方程 $L_V u=0$ 有一个非平凡解 $v(y_1,\cdots,y_k)$. 那么对于支集在 G_0 内的每个无限次可微函数 $\varphi(y_1,\cdots,y_k)$ 有 $(v, L_V^*\varphi)_0=0$. 这里 $(u,v)_0=\int_{E^k} uv dy_1\cdots dy_k$. 在点 y^0 的邻域 Ω_0 内，我们考虑由下面等式定义的广义函数 $u(y)$:

$$(u,\varphi)=(v,\varphi(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0))_0$$

其中 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$. 显然在超平面 E^k 外 $u=0$，而且对于 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_0)$，有

$$\begin{aligned}(u, L^*\varphi)&=(v,(L_1^*\varphi+M_1\varphi+(c_2^*+c)\varphi)(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0))_0\\&=(v, L_V^*\varphi(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0))_0=0\end{aligned}$$

这表示广义函数 $u(x)$ 在点 y^0 的邻域 Ω_0 内是方程 $Lu=0$ 的解并且 $u(x)$ 在 Ω_0 内不是无限次可微的函数.

现在我们证明：如果 $k\geqslant 1$，则在某点 $y^0\in U_0$ 的一个邻域 G_0 内的平面 E^k 上，方程 $L_V v=0$ 存在一个非平凡解. 如果在 $E^k\cap U_0$ 内有一个系数 $\alpha^{lp}\neq 0$，则由 Cauchy-Ковалевская 定理，在某点 $y^0\in E^k\cap U_0$ 的邻域内，这种解存在。但是，如果在 x^0 的邻域 U_0 内的 E^k 上所有系数 $\alpha^{lp}\equiv 0$，则容易看出在 E^k 上 $\mathrm{grad}\alpha^{lp}=0$，因此算子 M_1 的系数在 $E^k\cap U_0$ 上都等于 0. 因为在 E^k 上

$$\sum_{l,p=1}^m |\alpha^{lp}|+\sum_{p=1}^m|\beta^p|\neq 0$$

对于这种情况，在 $E^k\cap U_0$ 上对于 $s\leqslant k$ 的某一个系数 $\beta^s\neq 0$. 所以在某点 $y^0\in E^k\cap U_0$ 的邻域内，由应用于一阶方程的 Cauchy-Ковалевская 定理得知，对于方程 $L_V v=0$，存在一个非平凡解. 定理证毕.

从定理 2.6.2 和 2.8.1，我们有下面的结果：

定理 2.8.2 假设在 Ω 内微分算子 (2.6.1) 的所有系数 a^{kj}, b^j, c 都是实解析函数，并且假设在 Ω 内处处成立

$$\sum_{k,j=1}^m |a^{kj}|+\sum_{j=1}^m|b^j|\neq 0 \tag{2.8.17}$$

那么，算子(2.6.1)的亚椭圆性的充分必要条件是：在区域Ω的每一点上，算子组$\{Q, L^{0(1)}, \cdots, L^{0(m)}\}$的秩等于$m$.

一些例子表明：如果条件(2.8.17)不满足，则这个定理的结论不一定正确。函数$u = |x|^\nu$, $\nu > 0$满足方程

$$|x|^{2\nu}\Delta u - (\nu m + \nu(\nu - 2))u = 0 \tag{2.8.18}$$

而且当ν不是整数时，方程(2.8.18)在原点的邻域内显然不是亚椭圆的。另一方面，L. Hörmander 的一篇论文[52]指出：如果γ是一个整数而且$\gamma > 1$，则方程

$$|x|^{2\gamma}\Delta u - u = 0 \tag{2.8.19}$$

在每个区域$\Omega \in R^m$内是亚椭圆的。

在算子(2.5.1)的系数在Ω内是解析函数的情况下，M. Derridj[20]证明了下面的定理，它与定理2.5.2一起，当假设在Ω的每一点上算子$X_1, \cdots, X_r$的系数不全为0时，给出了算子(2.5.1)的亚椭圆性的充分必要条件.

定理 2.8.3 假设在Ω内微分算子(2.5.1)的所有系数a_j^l和c ($j = 0, 1, \cdots, r$; $l = 1, \cdots, m$)都是解析函数，并且假设在某点$x^0 \in \Omega$上算子组$\{X_0, \cdots, X_r\}$的秩等于k（这里$0 < k < m$），则在Ω内算子(2.5.1)不是亚椭圆的.

根据定理2.5.2和2.8.3推出如下结果：

定理 2.8.4 假设在Ω内微分算子(2.5.1)的所有系数a_j^l和c ($j = 0, 1, \cdots, r$; $l = 1, \cdots, m$)都是解析函数，并且对于Ω内的一切点

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{l=1}^{m}|a_j^l| \neq 0 \tag{2.8.20}$$

则在Ω内算子(2.5.1)为亚椭圆的充分必要条件是：在区域Ω的每点上，算子组$\{X_0, \cdots, X_r\}$的秩等于m.

定理 2.8.3 的证明 只需要证明，如果在Ω内算子(2.5.1)是亚椭圆的，则在Ω的所有点上，算子组$\{X_0, \cdots, X_r\}$的秩等于m. 假设不然，设在点$x^0 \in \Omega$上算子组$\{X_0, \cdots, X_r\}$的秩是k，且$1 \leqslant$

$k < m$. 我们将算子 (2.5.1) 写为形式 (2.6.1). 容易看出，如果对于算子(2.5.1)，(2.8.20)成立，则对应于算子(2 6.1)，条件 (2.8.17) 成立，此外，

$$Q = X_0 - \sum_{s=1}^{r} a^j_{sx_j} X_s, \quad L^{0(j)} = 2\sum_{s=1}^{r} a^j_s X_s$$

所以对于所得到的算子 (2.6.1)，在点 x^0 上算子组 $\{Q, L^{0(1)}, \cdots, L^{0(m)}\}$的秩也小于$m$，按定理 2.8.2，由此推得，所得到的算子(2 6.1) 不是亚椭圆的. 这与 (2.5.1) 是亚椭圆的条件矛盾.

第三章　附加的论题

§1. 具非负特征形式的二阶方程解的定性性质

在第一章的 §1 和 §5 中已经证明了具非负特征形式二阶方程的极大值原理.

对于 Laplace 方程,成立所谓强极大值原理的熟知性质：在区域 Ω 内调和且在 Ω 的内点上取其最大值的函数 u 是一个常数. 对于在其边平行于坐标轴的矩形 Q 内考虑的传热方程 $u_{xx}-u_t=0$，强极大值原理取如下形式：在 Q 的内点 (t_0, x_0) 上取其最大值的解 $u(t, x)$ 在 Q 内当 $t\leqslant t_0$ 时是常数. Hopf[49](也可参看[81,95])证明了二阶椭圆型方程的强极大值原理，Nirenberg[85] 证明了二阶抛物型方程的强极大值原理.

Pucci[108,109] 和 А. Д. Александров[1-5] 研究了具非负特征形式的一般二阶方程的强极大值原理. Bony[15-17] 研究了方程为形式(2.5.1)的强极大值原理.

我们将假设方程

$$L(u)=a^{kj}u_{x_kx_j}+b^ku_{x_k}+cu=0,\quad a^{kj}\xi_k\xi_j\geqslant 0 \qquad (3.1.1)$$

的系数在 Ω 内有界且 $u\in C^{(2)}(\Omega)$. 在每一点 x 上考虑对应于矩阵 $\|a^{kj}\|$ 的正特征值的特征向量，而且令 $E(x)$ 是这些向量生成的线性空间. 我们称这空间为在点 x 上的椭圆性平面. 一条曲线 l 称为方程 (3.1.1) 的椭圆性曲线,如果在曲线的每一点的邻域内存在一个向量场 $(Y_1(x),\cdots,Y_m(x))$,使得 $Y_j\in C^{(1)}$,向量 $(Y_1(x),\cdots,Y_m(x))$ 位于平面 $E(x)$ 上,在此邻域的每一点 x 上 $a^{kj}(x)\cdot Y_k(x)Y_j(x)\geqslant \text{const}>0$，而且曲线 l 是方程组 $dx_j/dt=Y_j(x)$, $j=1,\cdots,m$ 的轨线.

集合$\mathfrak{M}$称为方程 (3.1.1) 的椭圆型连通集，如果$\mathfrak{M}$的任意两点可以用有限条椭圆性曲线弧段组成的曲线连结起来，而且不存在具有同样性质并真正包含$\mathfrak{M}$的集合。如果整个区域Ω是椭圆型连通集，则称方程 (3.1.1) 在Ω内椭圆连通。显然椭圆型方程是椭圆连通的。容易作出在区域Ω内是椭圆连通但不是椭圆型方程的例子。例如方程

$$L(u) \equiv u_{x_1x_1} + \cos^2 x_1 u_{x_2x_2} + 2\sin x_1 \cos x_1 u_{x_2x_3} + \sin^2 x_1 u_{x_3x_3} = 0 \tag{3.1.2}$$

在区域 $\Omega\left\{|x_1| < \frac{\pi}{2}\right\}$ 内椭圆连通，然而容易验证在区域的任意点上它不是椭圆型的。为了证明 (3.1.2) 在Ω内椭圆连通，我们必须找出椭圆性平面 $E(x)$。这平面由特征向量 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, \operatorname{tg} x_1)$生成。如果 $A = \partial/\partial x_1$，而且

$$B = \frac{\partial}{\partial x_2} + \operatorname{tg} x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

则

$$[A, B] = AB - BA = \frac{1}{\cos^2 x_1} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

向量 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, \operatorname{tg} x_1)$ 和 $(0, 0, 1/\cos^2 x_1)$ 在Ω的每一点上线性无关。因此从下面的 П. К. Рашевский 定理[115] 推得方程 (3.1.2)的椭圆连通性。

定理 3.1.1 假设在Ω的每一点上，算子

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.1.3}$$

和它们的换位子中，存在m个线性无关算子（设系数 α^{kj} 充分光滑）。则Ω的任意两点可以用微分方程组

$$\frac{dx_s}{d\tau} = \alpha^{sj}(x), \quad s = 1, \cdots, m$$

的轨线的有限个弧段组成的曲线连结，其中 j 取 $1, \cdots, n$。

下面关于“零的传播”的基本定理成立。

定理 3.1.2 如果在区域Ω内$u \geqslant 0$而且$L(u) \leqslant 0$，并且在点$x^0 \in \Omega$上$u = 0$，则在包含点x^0的椭圆型连通集上$u \equiv 0$.

从定理 3.1.2 立即推得下面关于方程 (3.1.1) 的强极大值原理的定理。

定理 3.1.3 假设在区域Ω内$L(u) \geqslant 0$，并且假设系数c和$M = \sup_\Omega u$由不等式$Mc \leqslant 0$相联系。如果$u(x^0) = M$且$x^0 \in \Omega$，则在包含点x^0的椭圆型连通集上，或者$u \equiv 0$，或者$u \equiv M$而且$c \equiv 0$.

特别是，如果方程$L(u) = 0$在Ω内椭圆连通而且$c \equiv 0$，则在Ω内$u \equiv M$. 这里，我们不给定理 3.1.2 和 3.1.3 的详细证明（在 А. Д. Александров 的论文[1-7]中有详细证明），只指出证明的基本步骤（后面我们将根据 Bony[15]给出 (2.5.1) 型方程强极大值原理的详细证明和对方程 (3.1.1) 的一个类似证明）.

借助下面辅助的结果可以证明定理 3.1.2.

引理 3.1.1 假设Ω_1是半空间$x_1 > 0$内的一个区域，其边界包含平面$x_1 = 0$上的一个区域G. 令G_1是G的一个闭子集，x^0是集G_1的一个点. 令$u(x)$是$C^{(2)}(\bar{\Omega}_1)$类中的一个非负函数，在$\bar{\Omega}_1 \backslash G_1$内为正的，并且使得

$$u(x^0) = 0,\ u_{x_k}(x^0) = 0,\ k = 1, \cdots, m$$

则对于每一个$N > 0$，在Ω_1内存在点$x = (x_1, \cdots, x_m)$，任意接近于平面$x_1 = 0$，且满足

1) $d^2u(x) \geqslant N u_{x_1}(x) dx_1^2$

2) $u_{x_1}(x) > \dfrac{1}{x_1} u(x)$

3) $u_{x_2}(x) = \cdots = u_{x_m}(x) = 0$

由这个引理容易推出下面的引理.

引理 3.1.2 假设区域Ω_1和函数$u(x)$满足引理 3.1.1 的假设. 此外，假设在 (3.1.1) 中的系数a^{11}在点x^0上不等于 0. 则在x^0的任意小邻域内，存在Ω的点使得$L(u) > 0$.

我们用反证法来证明定理 3.1.2. 假设在Ω内存在一个点x，

使得 $u(x)=0$，而且在通过 x 的椭圆性曲线的某些点上 $u\neq 0$，可以找到一个包含在 Ω 内的椭球，在这个椭球内 $u>0$，在其边界的某点 x^0 上 $u=0$. 此外，$a^k(x^0)n_kn_l>0$，其中 $n=(n_1,\cdots,n_m)$ 是椭球在点 x^0 的单位法线. 现在我们选取新的自变量 $y_1,\cdots,y_m$，使得 y_1 轴的方向与 n 的方向一致，并且在点 x^0 的邻域内椭球的边界在平面 $y_1=0$ 上. 那么根据引理 3.1.2，在 x^0 的邻域内存在点使得 $L(u)>0$，这与定理 3.1.2 的假设矛盾.

对于具有 $b^k\equiv 0$ 和 $c\equiv 0$ 的广泛的方程(3.1.1)类，A. Д. Александров 还证明过：如果$\mathfrak{M}$是包含点 x^0 的椭圆型连通集，则在 x^0 的充分小邻域 Ω_1 内，存在一个 $C^{(2)}(\Omega)$ 类函数 $u(x)$，使得在$\mathfrak{M}$上 $u=0$，在 $\Omega_1\setminus\mathfrak{M}$ 上 $u>0$，而且在 Ω_1 内 $L(u)=0$.

在某些特殊假定下，对于方程(3.1.1)，类似于抛物型方程强极大值原理的定理也成立. 我们将假设在 Ω 的每点 P 的邻域内，可以这样引进局部坐标 $y_1,\cdots,y_m$，使得方程(3.1.1)取形式

$$L(u)\equiv\sum_{k,l=1}^{n}\alpha^{kl}u_{y_ky_l}+\sum_{k=1}^{m}\beta^ku_{y_k}+cu=0,\quad \alpha^{kl}\xi_k\xi_l\geqslant 0 \tag{3.1.4}$$

其中 $n<m$，并且由方程 $y_{n+1}=\text{const},\cdots,y_m=\text{const}$ 给定的平面是(3.1.4)的椭圆型连通集.

我们假设：在这个邻域内，向量 $\bar\beta=(0,\cdots,0,\beta_{n+1},\cdots,\beta_m)$ 的分量满足 Lipschitz 条件并且 $\bar\beta\neq 0$.

令 $y=(y_1,\cdots,y_m)$. 曲线 l 称为(3.1.4)的抛物性曲线：如果 l 是微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=\bar\beta(y) \tag{3.1.5}$$

的轨线. 则集合$\mathfrak{M}$称为方程(3.1.1)在点 x^0 的抛物型连通集，如果从点 x^0 到$\mathfrak{M}$的任意点可以按照向量 $\bar\beta$ 的方向用有限段方程(3.1.1)的椭圆性曲线弧段和抛物性曲线弧段组成的曲线连结，而且也不存在包含$\mathfrak{M}$并具有同样性质的集合.

定理 3.1.4 如果在 Ω 的每一点的邻域内，方程(3.1.1)可以

变换为 (3.1.4) 的形式，又如果在Ω内 $u \geqslant 0$ 并且 $L(u) \leqslant 0$，且如果在Ω的点 x^0 上 $u = 0$，则在点 x^0 的抛物型连通集上 $u = 0$. 如果 $c \equiv 0$ 而且 (3.1.4) 的 $\bar{\beta} \neq 0$，则在Ω的任意点 x^1 的一个充分小邻域 Ω_1 内，存在 $C^{(2)}(\Omega_1)$ 类的函数 $u(y)$，使得在 Ω_1 内 $L(u)=0$，在点 x^1 的抛物型连通集上 $u = 0$，而且在此集的外面 $u > 0$.

定理 3.1.5 假设在Ω的每一点的一个邻域内，方程 (3.1.1)可以变换为 (3.1.4) 形式. 假设在Ω内 $L(u) \geqslant 0$，而且系数 c 和$M = \sup_\Omega u$ 是由不等式 $Mc \leqslant 0$ 联系着的. 如果 $u(x^0) = M$ 并且 $x^0 \in \Omega$，则在点 x^0 的抛物型连通集上，或者 $u \equiv 0$，或者 $u \equiv M$ 而且 $c \equiv 0$.

定理 3.1.4 的证明是在引理 3.1.1 和类似于引理 3.1.2 的结果的基础上进行的.

在 А. Д. Александров 的论文里，在方程 (3.1.1) 的系数的较一般的假设和 $u(x)$的光滑性较弱的假设下，证明了定理 3.1.2—3.1.5. 特别是，对于 Соболев 空间 $W^2_m(\Omega)$的函数 $u(x)$，证明了类似于定理 3.1.2 的定理. 他还研究在Ω内具有如下性质的函数 $u(x)$ 的零点集合：在Ω内 $u \geqslant 0$，$L(u) \leqslant 0$，并且 $u(x^0) = 0$ 和 $u_{x_j}(x^0) = 0$，$j = 1, \cdots, m$，其中 x^0 是Ω的边界点.

根据 Bony 的论文[15-17]，我们现在来证明形为

$$P(u) = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 u + X_0 u + cu = 0,\ c \leqslant 0 \qquad (3.1.6)$$

的方程的强极大值原理，其中 $X_j (j = 0, 1, \cdots, r)$ 是一阶微分算子

$$X_j \equiv \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (3.1.7)$$

为了简单起见，我们假设系数 $a_j^k(x)$ 在Ω内是无限次可微(或充分光滑)函数. 用 $\bar{X}_j(x)$ 表示在区域Ω内的向量场

$$\bar{X}_j(x) = (a_j^1(x), \cdots, a_j^m(x))$$

我们将算子 $P(u)$ 也写为形式

$$P(u) = a^{kl}u_{x_k x_l} + b^k u_{x_k} + cu$$

其中，$c(x)$在Ω内有界并且$c \leqslant 0$.

我们将用同样方法来证明一般二阶方程（3.1.1）的强极大值原理.

我们用F表示在Ω内使得$u(x) = M$而$M = \sup_\Omega u$的点集. 我们假设$M \geqslant 0$并且$u \in C^{(2)}(\Omega)$. 强极大值原理的证明基于下面的辅助结果.

引理 3.1.3 令点x^0属于F，并且假设存在一个球Q，它由以x^1为中心以ρ为半径的球面S所围成，使得$x^0 \in S$，$Q \cup S \subset \Omega$并且$(Q \cup S) \cap F = x^0$. 假设在Ω内$P(u) \geqslant 0$. 则对于任意的$j = 1, \cdots, r$，向量$\overline{X}_j$与向量$x^1 - x^0 = (x_1^1 - x_1^0, \cdots, x_m^1 - x_m^0)$正交.

证明 令$a(x, \xi) \equiv a^{kl}(x)\xi_k\xi_l$并且考虑$a(x^0, x^1 - x^0)$. 因为

$$a(x, \xi) = \sum_{j=1}^{r} (\overline{X}_j(x), \xi)^2 \equiv \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m} a_j^k(x)\xi_k \right)^2$$

从方程$a(x^0, x^1 - x^0) = 0$得到$(\overline{X}_j(x^0), x^1 - x^0) = 0$. 所以为了证明引理 3.1.3，只需要证明$a(x^0, x^1 - x^0) = 0$.

假设不然. 设$a(x^0, x^1 - x^0) > 0$. 我们考虑函数

$$v(x) = e^{-q|x - x^1|^2} - e^{-q\rho^2}$$

其中$q = \text{const}$. 显然在点x^0

$$P(v) = e^{-q\rho^2}\Big[4q^2 a(x^0, x^1 - x^0) - 2q \sum_{k=1}^{m} \big(a^{kk}(x^0) + b^k(x^0)(x_k^0 - x_k^1)\big)\Big]$$

如果q充分大而$a(x^0, x^1 - x^0) > 0$，则在点x^0上$P(v) > 0$. 从而存在一个以点x^0为中心的球Q_1，使得在Q_1内$P(v) > 0$并且$Q_1 \subset \Omega$. 令S_1是Q_1的边界. 令$w(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$，其中$\varepsilon = \text{const} > 0$. 由假设因为在$\Omega$内$P(u) \geqslant 0$，从而在$Q_1$内$P(w) > 0$. 在属于$F$的$S_1$的点上，因为点$x^1$到集合$S_1 \cap F$的距离显然大于$\rho$，函数$v(x) \leqslant \text{const} < 0$. 因此存在一个集合$S_1 \cap F$的邻域$\sigma_1$，其

中，不等式 $w(x) < M$ 成立．在集合 $S_1\backslash\sigma_1$ 上有 $u(x) < M - \delta$，其中 $\delta = \text{const} > 0$．所以如果 ε 充分小，则在 $S_1\backslash\sigma_1$ 上我们有 $w < M$．

因此对于充分小的 $\varepsilon > 0$，在 S_1 的所有点上我们有 $w(x) < M$．显然 $w(x^0) = M$．由此得到函数 $w(x)$ 在 Ω_1 的内点上取到它的非负最大值，在该处 $P(w) > 0$．因为在 Ω 内 $c \leqslant 0$，根据引理 1.1.2 函数 $w(x)$ 不可能在区域 Ω_1 的内点上取其非负最大值．这个矛盾证明了引理 3.1.3．

引理 3.1.4 假设向量场 $\bar{X}_j(x)(j = 1, \cdots, r)$ 的轨线 $x(t)$ 使得 $x(t_0) \in F$，并且假定在 Ω 内 $P(u) \geqslant 0$．那么，如果 $\delta(t)$ 是点 $x(t)$ 到 F 的距离，而且如果 $t_0 < t \leqslant t_1$ 时 $\delta(t) > 0$，则对于每一个 $t \in [t_0, t_1]$

$$\liminf_{h \to 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{|h|} \geqslant -K\delta(t) \tag{3.1.8}$$

其中 $K = \text{const} > 0$．

证明 假设在 $n \to \infty$ 时 $h_n \to 0$ 而 $x^n = x(t + h_n)$．我们用 y^n 表示点 x^n 在 F 上的投影，即 $|x^n - y^n|$ 等于 x^n 到 F 的点的距离的下确界．我们考虑 x^n 充分接近于 $x(t) = x$．选取子序列 y^n，使得当 $n \to \infty$ 时 $y^n \to y$．显然 y 是 x 在 F 上的投影．容易看出，

$$\frac{1}{|h_n|}(\delta(t + h_n) - \delta(t)) = \frac{1}{|h_n|}(|y^n - x^n| - |y - x|) \geqslant -|\bar{X}_j(x)||\cos\gamma| - K_1 h_n \tag{3.1.9}$$

成立，其中 γ 是 $\bar{X}_j(x)$ 与向量 $(y - x)$ 的夹角，并且 $K_1 = \text{const} > 0$．根据引理 3.1.3，向量 $\bar{X}_j(y)$ 与向量 $y - x$ 正交．因此

$$\cos\gamma = \sin\gamma_1$$

其中 γ_1 是 $\bar{X}_j(x)$ 与 $\bar{X}_j(y)$ 的夹角．显然

$$|\bar{X}_j(x)\sin\gamma_1| \leqslant |\bar{X}_j(x) - \bar{X}_j(y)| \leqslant K|x - y| = K\delta(t)$$

由这个估计和 (3.1.9) 得出关系式 (3.1.8)．

引理 3.1.5 如果函数 $f(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上连续并且对于每一个 $t \in [t_1, t_2]$ 成立关系式

$$\liminf_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{|h|}\geqslant -K,\quad K=\text{const}>0 \qquad (3.1.10)$$

则函数 $f(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上满足具有常数 K 的 Lipschitz 条件。

证明 我们假设 $f(t)$ 不满足具有常数 K 的 Lipschitz 条件. 则存在点 s_1 和 s_2 以及某正数 ε 使得

$$\left|\frac{f(s_1)-f(s_2)}{s_1-s_2}\right|\geqslant K+\varepsilon$$

因为函数 $f(t)$ 对于 $t\in[t_1, t_2]$ 是连续的,所以存在一个数 $\rho_0>0$,使得对于 $|s_1-t'|\leqslant\rho_0$ 和 $|s_2-t''|\leqslant\rho_0$, 关系式

$$\left|\frac{f(t')-f(t'')}{t'-t''}\right|\geqslant K+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.1.11)$$

成立. 从 (3.1.10) 得到, 对于每一点 $\tau\in[t_1, t_2]$, 存在一个邻域 $|t-\tau|\leqslant\rho(\tau)$, 使得

$$\left|\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}\right|\leqslant K+\frac{\varepsilon}{4}$$

对于这个邻域中的所有 t 成立. 我们可以假设 $\rho(\tau)\leqslant\rho_0/2$. 现在我们选取区间 $[t_1, t_2]$ 的有限覆盖, $[t_1, t_2]$ 用这种型式的邻域覆盖, 并且假设 $\tau^1<\tau^2<\cdots<\tau^n$ 是这些邻域的中心. 显然对于所有的 $k, s=1, \cdots, n; k\neq s$

$$\left|\frac{f(\tau^k)-f(\tau^s)}{\tau^k-\tau^s}\right|\leqslant K+\frac{\varepsilon}{4}$$

因此对于某 t' 与 t''

$$\left|\frac{f(t')-f(t'')}{t'-t''}\right|\leqslant K+\frac{\varepsilon}{4}$$

这跟不等式 (3.1.11) 矛盾. 引理证毕.

从引理 3.1.4 和 3.1.5 得到如下结果.

定理 3.1.6 假设 $P(u)\geqslant 0$, 并且向量场 $\bar{X}_j(x)(j=1, \cdots, r)$ 的轨线 $x(t)$ 包含集合 F 的一个点 $x(t_0)$, 则整条轨线属于 F.

证明 假设相反. 则存在一个区间 $[t_1, t_2]$, 使得 $x(t_1)\in F$, 而对于 $t_1<t\leqslant t_2$, $x(t)$ 不属于 F. 从引理 3.1.4 和 3.1.5 得到,对

于属于区间 $[t', t'']$ 的任意的 t 和 $t+h$，其中 $t_1 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_2$，

$$|\delta(t+h)-\delta(t)| \leqslant K|h| \max_{[t',t'']} \delta(t)$$

如果 $|h| \leqslant 1/2K$，则对于 $t \in [t_1, t_1+h]$，有

$$\delta(t) \leqslant \frac{1}{2} \max_{[t_1,t_1+h]} \delta(t)$$

这表示对于 $|t-t_1| \leqslant h$ 有 $\delta(t)=0$，而与点 t_1 的选取矛盾．定理证毕．

定理 3.1.6 的推论是方程 (3.1.1) 的强极大值原理．

定理 3.1.7 假设 $u(x) \in C^{(2)}(\Omega)$，在 Ω 内 $P(u) \geqslant 0$，并且算子组 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 在 Ω 的每一点上有秩 m (参阅第二章 §5 算子组的秩的定义)． 如果 $u(x)$ 在 Ω 内的点 x^0 上取到它的非负最大值 M，则在 Ω 内 $u \equiv M$．

证明 算子组 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 有秩 m 的条件与定理 3.1.1 一样推出：点 x^0 可以用有限条向量场 $\overline{X}_j(x)(j=1, \cdots, r)$ 的轨线弧段组成的曲线连接到区域 Ω 的任意点．因此由定理 3.1.6，函数 $u(x)$在 Ω 内必须是常数．定理证毕．

在一定条件下，对于形如 (3.1.6) 的方程也成立类似于定理 3.1.5 的强极大值原理．

我们先建立一些辅助结果．我们称算子 $P(u)$ 在区域 Ω 内满足条件 A：如果在 Ω 的每一点 x^0 的邻域 $\Omega(x^0)$ 内，存在以 x^0 为原点的局部坐标系 $y_1, \cdots, y_m$，使得在 $\Omega(x^0)$ 内算子 $P(u)$ 取形式

$$P(u)=\sum_{k,j=1}^{n} \alpha^{kj} u_{y_k y_j}+\sum_{k=1}^{m} \beta^k u_{y_k}+cu; \quad n<m \qquad (3.1.12)$$

且具有性质：如果点 $y^0=(y_1^0, \cdots, y_m^0)$ 属于 F，则 $\Omega(x^0)$ 中所有满足

$$y_{n+1}=y_{n+1}^0, \cdots, y_m=y_m^0$$

的点也属于 F．

引理 3.1.6 假设点 x^0 属于 F，并且假设存在一个球 Q，它由以点 x^1 为中心以 ρ 为半径的球面 S 所围成，使得 $x^0 \in S$，$Q \cup S \subset \Omega$

并且 $(Q\cup S)\cap F = x^0$. 假设算子 $P(u)$ 满足条件 A 并且在 Ω 内 $P(u)\geqslant 0$. 则

$$(\overline{X}_0(x^0), x^1 - x^0) \leqslant 0 \qquad (3.1.13)$$

证明 根据条件 A，我们可以假设在点 x^0 的邻域 $Q(x^0)$ 内，局部坐标 $y_1, \cdots, y_m$ 已经这样选取：使得点 x^1 的坐标为 $(0, \cdots, 0, 1)$，并且 y_m 轴取向量 $x^1 - x^0$ 的方向. 我们考虑柱体

$$y_{n+1}^2 + \cdots + y_{m-1}^2 + (y_m - 1)^2 \leqslant 1$$

显然在 $Q(x^0)$ 属于柱体的那部分没有 F 的点. 令

$$w(y) = \varepsilon(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + y_{n+1}^2 + \cdots + (y_m - 1)^2$$

其中 $\varepsilon = \text{const} > 0$，又令

$$v(y) = e^{1-w(y)} - 1$$

容易看出，在点 x^0 上

$$P(v) = -2\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\alpha^{kk} - 2\beta^m$$

因为由假设在 x^0 的邻域内算子取形式 (3.1.12)，我们有 $\beta^m(x^0) = \lambda(X_0(x^0),\ x^1 - x^0)$，其中 $\lambda = \text{const} > 0$. 我们假设 (3.1.13) 不成立. 则在点 x^0 的某邻域 Ω_1 内 $\beta^m(y) > 0$，而且如果 ε 充分小，则在这个邻域内 $P(v) > 0$. 我们考虑函数

$$V(y) = u(y) + \alpha v(y),\quad \alpha = \text{const} > 0$$

显然在 Ω_1 内 $P(V) > 0$. 令 S_1 是 Ω_1 的边界. 因为 $S_1\cap F$ 和使 $v(y)\geqslant 0$ 的点集的距离是正的，所以对于充分小的 α，在 S_1 上我们有 $V(y) < M$. 容易看出 $V(x^0) = M$，所以 $V(y)$ 必须在 Ω_1 内取到它的非负最大值. 这与在 Ω_1 内 $P(V) > 0$ 而且 $c\leqslant 0$ 矛盾.

引理 3.1.7 假设向量场 $X_0(x)$ 的轨线 $x(t)$ 使得 $x(t_0)\in F$. 假设算子 P 满足条件 A，并且在 Ω 内 $P(u)\geqslant 0$. 如果对于 $t_0 < t\leqslant t_1$, $\delta(t) > 0$（这里 $\delta(t)$ 是点 $x(t)$ 到 F 的距离），则对于任意的 $h > 0$ 和使得 $t - h\in[t_0, t_1]$ 的 $t\in[t_0, t_1]$，我们有

$$\liminf_{h\to 0}\frac{\delta(t-h) - \delta(t)}{h} \geqslant -K\delta(t) \qquad (3.1.14)$$

其中 $K = \text{const} > 0$.

证明 象引理 3.1.4 的证明那样，我们考虑序列 $x^n = x(t - h_n)$，其中 $h_n > 0$，当 $n \to \infty$ 时 $h_n \to 0$，而且 t 和 $t - h_n$ 属于区间 $[t_0, t_1]$. 设 y^n 是 x^n 在集合 F 上的投影，而且设当 $n \to \infty$ 时 $y^n \to y$，其中 y 是点 $x = x(t)$ 在 F 上的投影. 则

$$\begin{aligned}\delta(t - h_n) - \delta(t) &= |x^n - y^n| - |x - y| \\ &\geqslant -h_n \left(\bar{X}_0(x), \frac{x - y}{|x - y|}\right) - K_1 h_n^2 \\ &= -h_n \left(\bar{X}_0(y), \frac{x - y}{|x - y|}\right) + h_n\Big((\bar{X}_0(y) \\ &\quad - \bar{X}_0(x)), \frac{x - y}{|x - y|}\Big) - K_1 h_n^2\end{aligned}$$

根据引理 3.1.6，有

$$\left(\bar{X}_0(y), \frac{x - y}{|x - y|}\right) \leqslant 0.$$

所以

$$\delta(t - h_n) - \delta(t) \geqslant -h_n K |x - y| - K_1 h_n^2$$

从最后这个不等式得到关系式 (3.1.4).

从引理 3.1.6 和 3.1.7 得到如下的强极大值原理.

定理 3.1.8 假设在 Ω 内 $P(u) \geqslant 0$，并且算子 P 满足条件 A. 如果 $x(t)$ 是向量场 $\bar{X}_0(x)$ 的轨线，使得 $x(t_0) \in F$，则对于所有的 $t \geqslant t_0$，$x(t) \in F$.

证明 假设相反. 则存在一点 x^0，使得 $x^0 \in F$，而且由条件 $x(t_1) = x^0$ 定义的向量场 $\bar{X}_0(x)$ 的轨线 $x(t)$ 上的点当 $t_1 < t \leqslant t_2$ 时都不属于 F. 根据引理 3.1.7，对于点 $x(t)$ 到集合 F 的距离 $\delta(t)$，关系式 (3.1.14) 成立.

我们证明，对于充分小的 $t - t_1$，从 (3.1.14) 可以推得 $\delta(t) = 0$. 跟证明引理 3.1.5 完全一样，我们得到：对于区间 $[t', t'']$ 内的任意值 t 和 $t - h$，其中 $t_1 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t_2$，关系式

$$\delta(t) - \delta(t - h) \leqslant Kh \max_{[t', t'']} \delta(t) \tag{3.1.15}$$

成立，其中 $K = \text{const} > 0$ 而且 $h > 0$. 如果 $t - h = t_1$ 而且 $h \leqslant$

$1/2K$，则对于 $t\in[t_1, t_1+h]$，从(3.1.15)推得

$$\delta(t)\leqslant\frac{1}{2}\max_{[t_1,t_1+h]}\delta(t) \tag{3.1.16}$$

因为 $\delta(t)\geqslant 0$，从(3.1.16)推得对于 $t_1\leqslant t\leqslant t_1+h$ 有 $\delta(t)=0$，所得矛盾证明了定理 3.1.8.

定理 3.1.9 假设在 Ω 的每一点上，算子组 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 的秩等于 n，其中 $n<m$，并且假设在 Ω 内 $P(u)\geqslant 0$. 如果在 Ω 的点 x^0 上 $u(x)$ 取其非负最大值 M，则在 Ω 的每一个这样的点 x 上 $u(x)=M$：这种点可以用有限条向量场 $\bar{X}_j(x)(j=0, 1, \cdots, r)$ 的轨线弧段组成的曲线和点 x^0 连结起来，并且规定这条曲线离开 x^0 时，向量 $\bar{X}_0(x)$ 的轨线的任意弧段是沿着向量 $\bar{X}_0(x)$ 的方向的.

证明 在定理的条件下，从 Frobeniu 定理[23]和定理 3.1.6 推得算子 $P(u)$ 在 Ω 内满足条件 A. 因此从定理 3.1.6 及 3.1.8 立即得到定理 3.1.9 的结论.

Bony 在他的论文[15-17]中，还证明具有解析系数形为(3.1.1)的方程的 Cauchy 问题解的唯一性定理和 Harnack 定理.

现在让我们来研究方程(3.1.1)*). 我们将它写为形式

$$L(u)=(a^{kj}(x)u_{x_j})_{x_k}+Qu+c(x)u=0,\ a^{kj}(x)\xi_k\xi_j\geqslant 0$$

其中

$$Q=\sum_{k=1}^{m}(b^k(x)-a^{kj}_{x_j}(x))\frac{\partial}{\partial x_k},\quad c\leqslant 0$$

令 $a(x,\xi)=a^{kj}(x)\xi_k\xi_j$. 在区域 Ω 内考虑算子 Q 和

$$L^{(j)}\equiv\sum_{k=1}^{m}a^{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\ (j=1, \cdots, m)$$

以及对应的向量场 $\bar{Q}(x)$ 和 $\bar{L}^{(j)}(x)=(a^{1j}(x), \cdots, a^{mj}(x))$，$j=1, \cdots, m$.

如果用算子 $L(u)$ 代替算子 $P(u)$，而且用 $\bar{L}^{(j)}(x)(j=1, \cdots, m)$ 代替向量场 $\bar{X}_j(x)(j=1, \cdots, r)$，引理 3.1.3—3.1.5 都成立.

---

*) 英译本注：这节的剩下部分是翻译本增加的.

我们仅仅要注意：对于引理 3.1.3 的证明，我们先证 $a(x^0,x^1-x^0)=0$. 从这个关系式和在 Ω 内 $a(x,\xi)\geqslant 0$ 的条件推出 $(\bar{L}^{(j)}(x^0),(x^1-x^0))=0$.

如果用算子 $L(u)$ 代替 $P(u)$, $Q(x)$ 代替向量场 $\bar{X}_0(x)$，而用 $L^{(j)}(x)(j=1,\cdots,m)$ 代替向量场 $\bar{X}_j(x)(j=1,\cdots,r)$，则引理 3.1.6 和 3.1.7 仍成立. 我们注意：在证明引理 3.1.6 时，必须证明 $\beta^m(x^0)=\lambda(\bar{Q}(x^0),x^1-x^0)$, $\lambda=\text{const}>0$. 这从 $L(u)$ 满足条件 A 的假设容易推得.

因此我们证明了如下的定理.

定理 3.1.10 假设 $L(u)\geqslant 0$，并且假设向量场 $L^{(j)}(x)(j=1,\cdots,r)$ 的轨线 $x(t)$ 包含集合 F 的一个点 $x(t_0)$. 则整条轨线 $x(t)$ 属于 F.

定理 3.1.11 假设在 Ω 内 $L(u)\geqslant 0$，并且假设算子组 $\{L^{(1)},\cdots,L^{(m)}\}$ 在 Ω 的每一点上有秩 m. 如果 $u(x)$ 在 Ω 中的某点 x^0 上取其非负最大值，则在 Ω 内 $u\equiv M$.

定理 3.1.12 假设在 Ω 内 $L(u)\geqslant 0$ 并且算子 L 满足条件 A. 如果 $x(t)$ 是向量场 $\bar{Q}(x)$ 的一个轨线，使得 $x(t_0)\in F$，则对于所有的 $t\geqslant t_0$, $x(t)\in F$.

定理 3.1.13 假设在 Ω 的每一点上算子组 $\{L^{(1)},\cdots,L^{(m)}\}$ 的秩等于 n，其中 $n<m$；假设在 Ω 内 $L(u)\geqslant 0$. 如果 $u(x)$ 在 Ω 的点 x^0 上取其非负最大值 M，则在 Ω 的每一个这样的点 x 上，$u(x)=M$，这种点可以用有限条向量场 $\bar{L}^{(j)}(x)(j=1,\cdots,m)$ 和 $\bar{Q}(x)$ 的轨线弧段组成的曲线与点 x^0 连接起来，并且规定这条曲线离开点 x^0 时，向量场 $\bar{Q}(x)$ 的任意轨线弧段沿向量 $\bar{Q}(x)$ 的方向.

定理 3.1.11 和 3.1.13 是类似于 А. Д. Александров 的定理 3.1.3 和 3.1.5.

§2. 退化二阶双曲型方程的 Cauchy 问题

我们研究特征形式在所考虑区域的每一点上有一个负特征值

而其余特征值为正或零的一类二阶方程. 自然称这类方程为弱双曲型. 也常称为退化双曲型方程. 对于这类方程的 Cauchy 问题可以用我们在第一章和第二章研究具非负特征形式的二阶方程的类似方法来研究. Cauchy 问题解的构造用双曲正则化方法来实现. 引理 1.7.1 在建立解的先验估计中起重要的作用.

我们将在区域 $G_T\{0 \leqslant t \leqslant T, x \in R^m\}$ 内考虑方程

$$u_{tt} - (a^{kl}(t, x)u_{x_k})_{x_l} + b^k(t,x)u_{x_k} + b^0(t, x)u_t + c(t, x)u = f(t,x) \tag{3.2.1}$$

具有初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{3.2.2}$$

的 Cauchy 问题, 其中 $x \in R^m$ 并且在 G_T 内对所有实的 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 有 $a^{kl}(t,x)\xi_k\xi_l \geqslant 0$.

在这一节中我们得到问题 (3.2.1), (3.2.2) 的适应性的充分条件; 在 §3 中我们还要获得一些必要条件. 对于 $x \in R^1$, $t = 0$ 时 $a^{kl}\xi_k\xi_l = 0$ 而且 $t \neq 0$, $t > 0$ 时 $a^{kl}\xi_k\xi_l > 0$ 的特殊情形, 许多文献研究过问题 (3.2.1), (3.2.2). (例如参看 [10, 12, 106] 等等, 在 [123] 中给出详细的文献目录.) 关于混合型方程 Tricomi 问题的研究, [131] 特别地引起对这个问题的兴趣. 在 [74, 72, 73, 82, 127, 62, 116, 149] 等论文中研究了 Cauchy 问题适定性的必要条件.

我们引入记号

$$G_\tau = \{0 \leqslant t \leqslant \tau, \ x \in R^m\}, \quad [\Phi, \Psi]_{G_\tau} = \int_{G_\tau} \Phi\Psi\, dt dx$$

$$(\Phi, \Psi)_{t=\tau} = \int_{R^m} \Phi(\tau, x)\Psi(\tau, x) dx$$

$$\|v\|_{\tau,s} = \left\{ \sum_{|l|+p \leqslant s} \left(D^l \frac{\partial^p v}{\partial t^p}, \ D^l \frac{\partial^p v}{\partial t^p}\right)_{t=\tau} \right\}^{1/2}$$

其中

$$D^l = \frac{\partial^{|l|}}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_m^{l_m}}, \quad |l| = l_1 + \cdots + l_m$$

(注意这里 D^l 的定义和第二章所用的差一个因子 $(-i)^l$.) 我们

记

$$\|v\|_{G_\tau;s}=\left\{\int_0^\tau \|v\|_{\sigma,s}^2 d\sigma\right\}^{1/2}$$

$$\|v\|_{\tau,q,\mu,s}=\left\{\sum_{\substack{p\leqslant q,\ l\leqslant\mu\\ q+\mu\leqslant s}}\left(D^l\frac{\partial^p v}{\partial t^p},\ D^l\frac{\partial^p v}{\partial t^p}\right)_{t=\tau}\right\}^{1/2}$$

$$\|v\|_{G_\tau,q,\mu,s}=\left\{\int_0^\tau \|v\|_{\sigma,q,\mu,s}^2 d\sigma\right\}^{1/2}$$

我们用 $\mathscr{H}^s(G_T)$ 表示在 G_T 中对 x 有紧支集的无限次可微函数集合关于范数 $\|v\|_{G_T;s}$ 闭化后所得的函数类。

引理 3.2.1 令 $u_\varepsilon(t,x)$ 在区域 $G^\varepsilon=\{0\leqslant t\leqslant T-\varepsilon,x\in R^m\}$ 内是双曲型方程

$$L_\varepsilon(u)=u_{tt}-\varepsilon\Delta u-(a_\varepsilon^{kj}u_{x_k})_{x_j}+b_\varepsilon^k u_{x_k}+b_\varepsilon^0 u_t$$
$$+c_\varepsilon u=f_\varepsilon\ (\varepsilon=\text{const}>0) \tag{3.2.3}$$

满足条件

$$u|_{t=0}=\varphi_\varepsilon(x),\ u_t|_{t=0}=\psi_\varepsilon(x) \tag{3.2.4}$$

的解，其中 a_ε^{kj}, b_ε^k, b_ε^0, c_ε, f_ε, φ_ε, ψ_ε 是 G^ε 内的无限次可微函数，而且 f_ε, φ_ε, ψ_ε 对 x 有紧支集. 假设对于所有的 ξ 和区间 $0\leqslant t\leqslant t_0$（$t_0$为小于$T-\varepsilon$ 的某个小正数)的 t，不等式

$$\alpha t(b_\varepsilon^k\xi_k)^2\leqslant Aa_\varepsilon^{kj}\xi_k\xi_j+a_{\varepsilon t}^{kj}\xi_k\xi_j \tag{3.2.5}$$

成立，其中 α 是 $\alpha>(2p+6)^{-1}$ 的常数（p 是 $p\geqslant-1$ 的整数）而且 A 是常数. 此外，假设对于所有的 ξ 和 $t_0\leqslant t\leqslant T-\varepsilon$ 的 t，(3.2.5)对于某些(可能不同)常数 α 和 A 成立. 则对于 $0\leqslant\tau\leqslant T-\varepsilon$，我们有估计

$$\|u_\varepsilon\|_{\tau,s}^2\leqslant M_1\{\|\varphi_\varepsilon\|_{0,s+p+4}^2+\|\psi_\varepsilon\|_{0,s+p+3}^2$$
$$+\max_{0\leqslant\mu\leqslant t_0}\|f_\varepsilon\|_{\mu,p+2,s,p+1+s}^2+\|f_\varepsilon\|_{\tau,s-2}^2$$
$$+\|f_\varepsilon\|_{G_\tau;0,s,s}^2+\|f_\varepsilon\|_{0,p,p+s+2,p+s+2}^2\} \tag{3.2.6}$$

其中，常数 M_1 依赖于下面这些函数绝对值的最大值：函数 a_ε^{kj}, $a_{\varepsilon x_k}^{kj}$, b_ε^k, b_ε^0 和 c_ε 关于 t 和 x 直到 $s-2$ 阶导数，关于 x 直到 s 阶的导数，阶数满足 $\rho\leqslant p$, $|l|\leqslant p+2+s$, $\rho+|l|\leqslant p+2+s$ 的形如 $D^l\partial^\rho/\partial t^\rho$ 的导数在 $t=0$ 的值，形如 $D^l\partial^\rho/\partial t^\rho$（其中$|l|\leqslant$

s, $\rho \leqslant s+1$) 的导数在区间 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 的值. 这里设 $s \geqslant 2$.

证明 令

$$v_p = \varphi_\varepsilon + t\phi_\varepsilon + \frac{t^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\right|_{t=0} + \cdots + \frac{t^{p+2}}{(p+2)!}\left.\frac{\partial^{p+2} u_\varepsilon}{\partial t^{p+2}}\right|_{t=0} \tag{3.2.7}$$

其中在 $t=0$ 上 u_ε 的导数用方程(3.2.3)及其关于 t 微分所得到的方程来表示,并且考虑到初始条件(3.2.4). 显然 v_p 依赖于 a_ε^{kj}, $a_{\varepsilon x_k}^{kj}$, b_ε^k, b_ε^0, c_ε, f_ε 和它们关于 t 和 x 直到 p 阶导数在 $t=0$ 的值, 并且依赖于 φ_ε, ϕ_ε 及它们直到 $p+2$ 和 $p+1$ 阶导数.

对于函数 $u = u_\varepsilon - v_p$, 我们得到方程

$$L_\varepsilon(u) = f - L_\varepsilon(v_p) \equiv F(t, x) \tag{3.2.8}$$

容易看出, F 及其对于 t 的直到 p 阶导数在 $t=0$ 为 0. 令 $w = \int_t^\tau u(\sigma, x)d\sigma$. 用 $we^{\theta t}$ 乘(3.2.8), 其中 θ 是将在下面选取的正常数, 并且在区域 G_τ 上积分. 令 $\tau \leqslant t_0$. 我们用分部积分变换所得方程的各项:

$$[L_\varepsilon(u), e^{\theta t}w]_{G_\tau} = [F, e^{\theta t}w]_{G_\tau} \tag{3.2.9}$$

显然

$$[u_{tt}, e^{\theta t}w]_{G_\tau} = \frac{1}{2}(u, e^{\theta t}u)_{t=\tau} + \left[ue^{\theta t}, \theta^2 w - \frac{3}{2}\theta u\right]_{G_\tau}$$

$$[\varepsilon\Delta u, e^{\theta t}w]_{G_\tau} = -\frac{1}{2}\varepsilon\theta[w_{x_k}, e^{\theta t}w_{x_k}]_{G_\tau} - \frac{1}{2}\varepsilon(w_{x_k}, w_{x_k})_{t=0}$$

$$[(a_\varepsilon^{kj}u_{x_k})_{x_j}, e^{\theta t}w]G_\tau = \frac{1}{2}[(\theta a_\varepsilon^{kj} + a_{\varepsilon t}^{kj})u_{x_k}, e^{\theta t}w_{x_j}]_{G_\tau}$$

$$- \frac{1}{2}(a_\varepsilon^{kj}w_{x_k}, w_x)_{t=0}$$

我们进一步得到

$$[b_\varepsilon^0 u_t, e^{\theta t}w]_{G_\tau} = [u, e^{\theta t}b_\varepsilon^0 u - (b_\varepsilon^0 e^{\theta t})_t w]_{G_\tau}$$

$$[b_\varepsilon^k u_{x_k}, e^{\theta t}w]_{G_\tau} = -[b_{\varepsilon x_k}^k u, e^{\theta t}w]_{G_\tau} - [b_\varepsilon^k w_{x_k}, e^{\theta t}u]_{G_\tau}$$

最后的这个方程给出估计

$$|[b_\varepsilon^k u_{x_k}, e^{\theta t} w]_{G_\tau}| \leqslant M_2 \tau^2 [u, t^{-1} e^{\theta t} u]_{G_\tau}$$
$$+ \frac{\alpha}{2} [t b_\varepsilon^k w_{x_k}, e^{\theta t} b_\varepsilon^k w_{x_k}]_{G_\tau} + \frac{1}{2\alpha} [u, t^{-1} e^{\theta t} u]_{G_\tau} \quad (3.2.10)$$

其中 M_2 是依赖于 $\sup_{G_\tau} |b_{\varepsilon x_k}^k|$ 的常数.现在我们来估计 $[F, e^{\theta t} w]_{G_\tau}$. 分部积分并且利用 F 及其直到 p 阶的导数在 $t=0$ 为 0 的事实,我们得到

$$[F, e^{\theta t} w]_{G_\tau} = \left[\frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}}, W_{p+1}\right]_{G_\tau}$$

其中

$$W_{\mu+1} = \int_t^\tau W_\mu(\sigma, x) d\sigma, \mu = 0, 1, \cdots, p; W_0 = e^{\theta t} w$$

因为

$$|W_{p+1}|^2 \leqslant e^{2\theta T} \tau^{2p+3} \int_0^\tau u^2(\sigma, x) d\sigma$$

得到

$$|[F, e^{\theta t} w]_{G_\tau}| \leqslant \frac{\tau^{2p+6}}{4\delta} e^{\theta T} |||F|||_{p+1, t_0}^2 + \delta [u, e^{\theta t} t^{-1} u]_{G_\tau} \quad (3.2.11)$$

其中选取常数 $\delta > 0$, 使得

$$\alpha^{-1} + 2\delta < 2p + 6, |||F|||_{p+1,\tau}^2 = \max_{0 \leqslant \sigma \leqslant \tau} \left(\frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}}, \frac{\partial^{p+1} F}{\partial t^{p+1}}\right)_{t=\sigma}$$

利用估计 (3.2.10),(3.2.11) 和条件 (3.2.5),并且令 θ 等于 A,对于 $\tau \leqslant t_0$, 从 (3.2.9) 我们推得

$$\tau y'(\tau) \leqslant (\alpha^{-1} + 2\delta) y(\tau) + M_3 \tau y(\tau) + M_4 \tau^{2p+6} |||F|||_{p+1, t_0}^2 \quad (3.2.12)$$

其中 $y(\tau) = [u, t^{-1} e^{\theta t} u]_{G_\tau}$, 常数 M_3 依赖于函数 $b_\varepsilon^0, b_{\varepsilon t}^0, b_{\varepsilon x_k}^k, c_\varepsilon$ 的绝对值在 G_{t_0} 的最大值和 T, 而 $M_4 = e^{\theta T} \delta^{-1}/2$. 从 (3.2.12) 得到

$$y(\tau) \leqslant \tau^{(\alpha^{-1}+2\delta)} e^{M_3 \tau} |||F|||_{p+1, t_0}^2 M_4 \int_0^\tau e^{-M_3 \tau} \tau^{2p+6-1-\alpha^{-1}-2\delta} d\tau$$
$$\leqslant M_5 \tau^{2p+6} |||F|||_{p+1, t_0}^2 \quad (3.2.13)$$

这是因为由假设 $2p+6-1-\alpha^{1}-2\delta>-1$。因此

$$(u, e^{A\tau}u)_{t=\tau}\leqslant M_6\tau^{2p+6}|||F|||^2_{p+1,t_0},\quad M_6=\text{const}>0 \quad (3.2.14)$$

现在我们用归纳法来估计 u 对于 x 的直到 s 阶的导数. 假设对于所有 $|l|\leqslant q-1$，我们已经得到形式为

$$(D^lu, D^lu)_{t=\tau}\leqslant E_l\tau^{2p+6}\sum_{|\beta|\leqslant|l|}|||D^\beta F|||^2_{p+1,t_0} \qquad (3.2.15)$$

的估计；这里 E_l 仅依赖于 a_ε^{kl}, $a_{\varepsilon x_k}^{kl}$, b_ε^k, b_ε^0, $b_{\varepsilon t}^0$, c_ε 及其对 x 直到 $q-1$ 阶导数的绝对值的最大值. 我们来证明对于 $|l|\leqslant q\leqslant s$ 这个估计仍成立.

为此目的，我们将算子 D^l 作用到 (3.2.8) 的左右两端，用 $e^{\theta_1 t}D^lw$ 乘所得方程，在 G_τ 上积分，并且对于所有 $|l|=q$ 的 l 求和. 于是我们得到

$$[D^lL_\varepsilon(u), e^{\theta_1 t}D^lw]_{G_\tau}=[D^lF, e^{\theta_1 t}D^lw]_{G_\tau},\quad |l|=q \quad (3.2.16)$$

象推导 (3.2.14) 所做的那样，用分部积分来变换 (3.2.16) 的积分，我们有

$$|[D^lF, e^{\theta_1 t}D^lw]_{G_\tau}|\leqslant\delta[D^lu, e^{\theta_1 t}t^{-1}D^lu]_{G_\tau}+M_7\tau^{2p+6}|||D^lF|||^2_{p+1,t_0}$$

$$[D^l(a_\varepsilon^{kl}u_{x_k})_{x_l}, e^{\theta_1 t}D^lw]_{G_\tau}=-\frac{1}{2}(a_\varepsilon^{kl}D^lw_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^lw_{x_l})_{t=\tau}$$

$$-\frac{1}{2}[(\theta_1a_\varepsilon^{kl}+a_{\varepsilon t}^{kl})D^lw_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^lw_{x_l}]_{G_\tau}$$

$$-\sum_{1\leqslant|\gamma|\leqslant q}C_\gamma[D^\gamma a_\varepsilon^{kl}D^{l-\gamma}u_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^lw_{x_l}]_{G_\tau};\quad C_\gamma=\text{const} \quad (3.2.17)$$

我们来估计这个等式的最后一项. 对于 $|\gamma|=1$，形如

$$[a_{\varepsilon x_p}^{kl}D^{l-\gamma}u_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^lw_{x_l}]_{G_\tau}$$

的积分可以用引理 1.7.1 进行估计，根据这个引理，不等式

$$(a_{\varepsilon x_p}^{kl}v_{x_kx_l})^2\leqslant Ma_\varepsilon^{kl}v_{x_kx_p}v_{x_lx_p} \qquad (3.2.18)$$

对于所有函数 $v\in C_{(2)}(R^m)$ 成立，常数 M 仅仅依赖于函数 a_ε^{kl} 的二阶导数. 分部积分并且注意 (3.2.18)，对于 $|\gamma|=1$ 和 $|l|=q$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&|[a^{k}_{\varepsilon x_p}D^{l-\gamma}u_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^l w_{x_j}]_{G_\tau}| \\
&= |[a^{kj}_{\varepsilon x_p}D^l u, e^{\theta_1 t}D^{l-\gamma}w_{x_k x_j}]_{G_\tau} + [a^{kj}_{\varepsilon x_p x_k}D^{l-\gamma}u, e^{\theta_1 t}D^l w_{x_j}]_{G_\tau} \\
&\quad + [a^{kj}_{\varepsilon x_p x_p}D^{l-\gamma}u, e^{\theta_1 t}D^{l-\gamma}w_{x_k x_j}]_{G_\tau}| \\
&= |[a^{kj}_{\varepsilon x_p}(D^{l-\gamma}w)_{x_k x_j}, e^{\theta_1 t}D^l u]_{G_\tau} + A^q_1 \\
&\leqslant A^q_1 + M_8[a^{kj}_\varepsilon D^{l-\gamma}w_{x_k x_\gamma}, e^{\theta_1 t}D^{l-\gamma}w_{x_j x}]_{G_\tau}
\end{aligned}
$$

其中记号 A^q_j 表示具有如下估计

$$
|A^q_j| \leqslant N_j \sum_{l\leqslant q} \tau[D^l u, t^{-1}e^{\theta_1 t}D^l u]_{G_\tau}
$$

的积分，常数 N_j 仅仅依赖于 (3.2.3) 的系数．常数 N_1 依赖于 a^{kj} 及其对 x 的直到三阶导数．我们用分部积分变换 (3.2.17) 最后一项中对应于 $|\gamma| \geqslant 2$ 的积分，有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\gamma|\geqslant 2} C_\gamma[D^\gamma a^{kj}_\varepsilon D^{l-\gamma}u_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^l w_{x_j}]_{G_\tau} \\
&= -\sum_{|\gamma|\geqslant 2} C_\gamma[(D^\gamma a^{kj}_\varepsilon D^{l-\gamma}u_{x_k})_{x_j}, e^{\theta_1 t}D^l w]_{G_\tau} = A^q_2
\end{aligned}
$$

常数 N_2 依赖于 a^{kj}_ε，$a^{kj}_{\varepsilon x_k}$ 及其对 x 直到 q 阶的导数绝对值的最大值．显然

$$
\begin{aligned}
&|[D^l(b^k_\varepsilon u_{x_k}), e^{\theta_1 t}D^l w]_{G_\tau}| = |[b^k_\varepsilon D^l u_{x_k}, e^{\theta_1 t}D^l w]_{G_\tau} + A^q_4| \\
&\quad\leqslant |[b^k_\varepsilon D^l u, e^{\theta_1 t}D^l w_{x_k}]_{G_\tau} + A^q_4| \\
&\quad\leqslant |A^q_4| + \left[\frac{\alpha}{2}tb^k_\varepsilon D^l w_{x_k}, e^{\theta_1 t}b^k_\varepsilon D^l w_{x_k}\right]_{G_\tau} \\
&\qquad + \frac{1}{2\alpha}[D^l u, e^{\theta_1 t}t^{-1}D^l u]_{G_\tau}
\end{aligned}
$$

常数 N_4 依赖于 b^k_ε 及其对 x 直到 q 阶的导数．

分部积分得到

$$
\begin{aligned}
[D^l(b^0_\varepsilon u_t), e^{\theta_1 t}D^l w]_{G_\tau} &= [D^l(b^0_\varepsilon u), e^{\theta_1 t}(D^l u - \theta_1 D^l w)]_{G_\tau} \\
&\quad - [D^l(b^0_{\varepsilon t}u), e^{\theta_1 t}D^l w]_{G_\tau} = A^q_5
\end{aligned}
$$

利用对于 (3.2.16) 中诸项所得到的估计和条件 (3.2.5)，选取 $\theta_1 > 0$ 充分大，并且用归纳法假设 (3.2.15)，从 (3.2.16) 我们推得

$$\tau y_q' \leqslant (\alpha^{-1} + 2\delta) y_q + K_q \tau y_q + \tilde{K}_q \tau^{2p+6} \sum_{|\gamma|\leqslant q} |||D^\gamma F|||^2_{p+1,t_0} \tag{3.2.19}$$

其中 $y_q = \sum_{|l|=q} [D^l u, e^{\theta_1 t} t^{-1} D^l u]_{G_\tau}$，而且常数 K_q 和 $\tilde{K}_q$ 依赖于 a_ε^{kj}, $a_{\varepsilon x_k}^{kj}$, b_ε^k, b_ε^0, $b_{\varepsilon t}^0$ 和 c_ε 对 x 直到 q 阶的导数。当 $q=1$ 时还依赖于 a_ε^{kj} 和 $a_{\varepsilon x_k}^{kj}$ 对 x 直到二阶的导数。对于 $|l| = q \leqslant s$，从 (3.2.19) 得到

$$(D^l u, D^l u)_{t=\tau} \leqslant E_q \tau^{2p+6} \sum_{|\gamma|\leqslant q} ||| D^\gamma F |||_{p+1,t_0} \tag{3.2.20}$$

这就是所要求的估计。

为了估计 $|l| \leqslant s-1$ 形如 $D^l u_t$ 的导数，我们考虑方程

$$[D^l L_\varepsilon(u), e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau} = [D^l F, e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau}, \quad \theta_2 = \text{const} \tag{3.2.21}$$

并且用分部积分变换各项。我们得到

$$[D^l u_{tt}, e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau} = \frac{1}{2} (D^l u_t, e^{-\theta_2 t} D^l u_t)_{t=\tau} + [\theta_2 e^{-\theta_2 t} D^l u_t, D^l u_t]_{G_\tau}$$

$$\varepsilon [D^l \Delta u, e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau} = -\frac{\varepsilon}{2} (D^l u_{x_k}, e^{-\theta_2 t} D^l u_{x_k})_{t=\tau} - \frac{\varepsilon}{2} [D^l u_{x_k}, \theta_2 e^{-\theta_2 t} D^l u_{x_k}]_{G_\tau}$$

容易看出

$$[D^l(a_\varepsilon^{kj} u_{x_k})_{x_j}, e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau} = -\frac{1}{2} (a_\varepsilon^{kj} D^l u_{x_k}, e^{-\theta_2 t} D^l u_{x_j})_{t=\tau}$$

$$+ \frac{1}{2} [(a_{\varepsilon t}^{kj} - \theta_2 a_\varepsilon^{kj}) D^l u_{x_k}, e^{-\theta_2 t} D^l u_{x_j}]_{G_\tau}$$

$$+ \sum_{|\gamma| \geqslant 1} C_\gamma [(D^\gamma a_\varepsilon^{kj} D^{l-\gamma} u_{x_k})_{x_j}, e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau}, \quad C_\gamma = \text{const}$$

显然，不等式

$$|[D^l b_\varepsilon^k u_{x_k}, D^l u_t e^{-\theta_2 t}]_{G_\tau}| \leqslant [D^l u_t, e^{-\theta_2 t} D^l u_t]_{G_\tau}$$

$$+ M_1 \sum_{|\gamma| \leqslant |l|+1} [D^\gamma u, e^{-\theta_2 t} D^\gamma u]_{G_\tau} | [D^l b_\varepsilon^0 u_t, D^l u_t e^{-\theta_2 t}]_{G_\tau} |$$

$$\leqslant M_9 \sum_{|\gamma| \leqslant |l|} [D^\gamma u_t, e^{-\theta_2 t} D^\gamma u_t]_{G_\tau}$$

成立，常数 M_8 和 M_9 依赖于 b_t^k 和 b_t^0 分别对 x 直到 $|l|$ 阶的导数. 考虑已经证明了的不等式 (3.2.20)，并选取常数 θ_2 充分大，对于 $|l|$ 应用归纳法，从 (3.2.21)，我们得到对于 $|l| \leqslant s-1$

$$(D^l u_t, D^l u_t)_{t=\tau} \leqslant M_{10} \tau^{2p+6} \sum_{\gamma_t \leqslant s} |||D^\gamma F|_t|_{p+1, t_0}$$

$$+ M_{11} \sum_{|l| \leqslant s-1} [D^l F, D^l F]_{G_\tau} \qquad (3.2.22)$$

其中常数 M_{10} 和 M_{11} 依赖于 a_t^{kl}, $a_{tx_k}^{kl}$, b_t^k, b_t^0, b_{tt}^0, c_t 以及它们对 x 直到 s 阶的导数.

应用 $\rho \geqslant 0$ 和 $|l| + \rho \leqslant s-2$ 的算子 $D^l \partial^\rho / \partial t^\rho$ 于(3.2.8)的左右两端，我们可以得到一些方程，利用这些方程，形为 $D^l \partial^{\rho+2} / \partial t^{\rho+2} (\rho \geqslant 0, |l| + \rho \leqslant s-2)$ 的导数可以用上面已经估计的 u 的导数项来表示. 因此对于 $\tau \leqslant t_0$ 我们得到 (3.2.6).

对于 $t_0 \leqslant \tau \leqslant T - \varepsilon$，我们用同样的方法获得估计 (3.2.6). 为了估计 $(u, u)_{t=\tau}$，我们考虑 (3.2.9) 并且完全象对于 $\tau \leqslant t_0$ 时所做的那样来变换其左端诸项. 但是，代替不等式 (3.2.10)，我们考虑不等式

$$|[b_t^k u_{x_k}, e^{\theta t} w]_{G_\tau}| \leqslant M_{12} [u, e^{\theta t} u]_{G_\tau}$$

$$+ \frac{\alpha}{2} [t b_t^k w_{x_k}, e^{\theta t} b_t^k w_{x_k}]_{G_{t_0}} + \frac{1}{2\alpha} [u, t^{-1} e^{-\theta t} u]_{G_{t_0}}$$

$$+ \frac{\alpha_1}{2} [b_t^k w_{x_k}, e^{\theta t} b_t^k w_{x_k}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} + \frac{1}{2\alpha_1} [u, e^{\theta t} u]_{G_\tau \setminus G_{t_0}}$$

其中 α_1 是使 $t \geqslant t_0$ 时 $\alpha_1 \leqslant \alpha t$ 的常数，并且利用到 $y(t_0) = [u, t^{-1} e^{\theta t} u]_{G_{t_0}}$ 的估计 (3.2.13). 我们利用不等式

$$|[F, e^{\theta t} w]_{G_\tau}| \leqslant [F, e^{\theta t} F]_{G_\tau} + M_{13} [u, e^{\theta t} u]_{G_\tau}$$

来估计 (3.2.9) 的右端，其中常数 M_{13} 仅与 T 有关. 令 $z = [u, e^{\theta t} u]_{G_\tau}$，并且选取常数 θ 充分大，对于 $\tau \geqslant t_0$，从 (3.2.9) 我们得到不等式

$$z'(\tau) \leqslant M_{14}z(\tau) + M_{15}|||F|||^2_{p+1,t_0} + M_{16}[F, F]_{G_2} \quad (3.2.23)$$

其中 M_{14}, M_{15} 和 M_{16} 依赖于 b^0_t, $b^k_{tx_k}$ 和 b^0_{tt} 的绝对值的最大值及 t_0. 从 (3.2.23) 推得所要求的估计。

对于 $\tau > t_0$, 我们用类似的方法来估计 $(D^l u, D^l{}_t u)_{t=\tau}$, $|l| \leqslant s$. 对于 $\rho \geqslant 2$, $|l| + \rho \leqslant s$ 并且 $\tau \geqslant t_0$, 导数 $D^l u_t$ 和 $D^l \dfrac{\partial^\rho u}{\partial t^\rho}$ 的估计,完全跟 $\tau \leqslant t_0$ 时所做的那样而获得。

从 u 的估计和关系式 $u = u_s - v_p$ 推得对于 u_s 所要求的估计。

定理 3.2.1 假设方程 (3.2.1) 的系数对于所有 ξ 和区间 $0 \leqslant t \leqslant t_0$($t_0$ 是比 T 小的正数)内的 t,满足不等式

$$\alpha t(b^k\xi_k)^2 \leqslant Aa^{kj}\xi_k\xi_j + a^{kj}_t\xi_k\xi_j \quad (3.2.24)$$

其中 α 是满足 $\alpha > (2p+6)^{-1}$ 的常数, p 是 $p \geqslant -1$ 的整数, A 是常数. 假设 (3.2.24) 对于所有的 ξ 和区间 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 的 t 也成立(常数 α 和 A 可能不同). 假设 a^{kj}, $a^{kj}_{x_k}$, b^k, b^0, c, b^0_t 和它们对 x 直到 s 阶 ($s \geqslant 2$) 的导数以及对 x 和 t 直到 $s-2$ 阶的导数在 G_2 内有界; 此外假设对于 $0 \leqslant t \leqslant t_0$, a^{kj}, $a^{kj}_{x_k}$, b^k, b^0 和 c 的形如 $D^l \dfrac{\partial^\rho}{\partial t^\rho}$ 的导数(其中 $\rho \leqslant p+1$, 而 $|l| \leqslant s$) 以及这些函数的形如 $D^l \dfrac{\partial^\rho}{\partial t^\rho}$ 的导数(其中 $\rho \leqslant p$, $|l| \leqslant p+s$ 并且 $\rho + |l| \leqslant p+s$)在 $t=0$ 的值都是有界的. 假设函数 $f(t,x)$, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 对 x 有紧支集. 则问题 (3.2.1), (3.2.2) 存在唯一的一个解 $u(t,x)$. 这个解对于区间 $0 \leqslant \tau \leqslant T$ 内几乎所有的 τ 满足如下估计:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\tau,s} \leqslant M_1\{&\|\varphi\|^2_{0;s+p+4} + \|\psi\|^2_{0;s+p+3} \\ &+ \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t_0}\|f\|^2_{\tau;p+1,s,p+1+s} + \|f\|^2_{\tau;s-2} \\ &+ \|f\|^2_{G_2;0,s+s} + \|f\|^2_{0;p,p+s+2,p+s+2}\}\end{aligned} \quad (3.2.25)$$

假定 f, φ 和 ψ 在 (3.2.25) 中出现的范数是有界的, 这里 M_1 是常数,只依赖于方程 (3.2.1) 的系数和上面所提的它们的导数. 如果 $2(s-2) \geqslant m+1$, 则 (3.2.1), (3.2.2) 存在一个唯一的古典解。

证明 我们引进磨光算子

$$P_\varepsilon[v](t,x)=\int_{R^m}\omega_\varepsilon(x-y)v(t,y)dy$$

其中 $\omega_\varepsilon(x-y)$ 是 x 和 y 的无限次可微函数，依赖于点 x 和 y 的距离 $r(x,y)$，而且满足 $\omega_\varepsilon\geqslant 0$，当 $r\geqslant\varepsilon$ 时 $\omega_\varepsilon=0$。令

$$\tilde{P}_\varepsilon[v](t,x)=\int_0^\infty\tilde{\omega}_\varepsilon(\tau-t)P_\varepsilon[v](\tau,x)d\tau;$$

$$\int_0^\infty\int_{R^m}\tilde{\omega}_\varepsilon(\sigma)\omega_\varepsilon(x)dxd\sigma=1$$

其中 $\tilde{\omega}_\varepsilon$ 是 σ 的无限次可微函数，使得对于 $\sigma\leqslant 0$ 和 $\sigma\geqslant\varepsilon$ 时 $\tilde{\omega}_\varepsilon(\sigma)=0$，而且对于所有的 σ，$\tilde{\omega}_\varepsilon\geqslant 0$. 考虑满足条件 (3.2.4)的方程 (3.2.3)，其中

$$\varphi_\varepsilon=P_\varepsilon[\varphi],\ \psi_\varepsilon=P_\varepsilon[\psi],\ a_\varepsilon^{kl}=\tilde{P}_\varepsilon[a^{kl}],\ b_\varepsilon^k=\tilde{P}_\varepsilon[b^k]$$

$$b_\varepsilon^0=\tilde{P}_\varepsilon[b^0],\ c_\varepsilon=\tilde{P}_\varepsilon[c],\ f_\varepsilon=\tilde{P}_\varepsilon[f]\qquad(3.2.26)$$

这些函数当 $t\leqslant T-\varepsilon$ 时有定义. 我们证明: 如果定理 3.2.1 的条件 (3.2.24) 满足，则对于充分小的 ε 和 $0\leqslant t\leqslant T-\varepsilon$，磨光函数满足条件 (3.2.5). 应用算子 $\tilde{P}_\varepsilon$ 到 (3.2.24) 的左右两端，得到

$$\tilde{P}_\varepsilon[\alpha t(b^k\xi_k)^2]\leqslant A\tilde{P}_\varepsilon[a^{kl}\xi_k\xi_l]+\tilde{P}_\varepsilon[a_t^{kl}\xi_k\xi_l]$$

显然

$$\tilde{P}_\varepsilon[\alpha t(b^k\xi_k)^2]\geqslant\alpha t\tilde{P}_\varepsilon[(b^k\xi_k)^2]\geqslant\alpha t(\tilde{P}_\varepsilon[b^k\xi_k])^2\geqslant\alpha t(b_\varepsilon^k\xi_k)^2$$

$$\tilde{P}_\varepsilon[a_t^{kl}\xi_k\xi_l]=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}_\varepsilon[a^{kl}\xi_k\xi_l]=a_{\varepsilon t}^{kl}\xi_k\xi_l$$

$$\tilde{P}_\varepsilon[a^{kl}\xi_k\xi_l]=a_\varepsilon^{kl}\xi_k\xi_l$$

因此对于 $t\leqslant T-\varepsilon$，(3.2.3) 的系数满足条件 (3.2.5).

在区域 $G_{T-\varepsilon}$ 内，我们考虑由 (3.2.26) 给定系数的方程(3.2.3) 具有初始条件 (3.2.4) 的 Cauchy 问题. 因为在 $\varepsilon>0$ 时 (3.2.3)是双曲型的，众所周知，问题 (3.2.3)，(3.2.4) 有解 $u_\varepsilon(t,x)$，在 $G_{T-\varepsilon}$ 内无限次可微. 因为条件 (3.2.5) 成立，由此推得 $u_\varepsilon(t,x)$ 满足 (3.2.6). 所以从集合 $u_\varepsilon(t,x)$ 中可以选取一个序列，当 $\varepsilon\to 0$ 时在 $\mathscr{H}^{s-1}(G_T)$ 的范数下收敛而且在 $\mathscr{H}^s(G_T)$ 中弱收敛. 容易看出极限函数 $u(t,x)$满足不等式 (3.2.25).

注 1 应用 Соболев 嵌入定理于 (3.2.20) 和 (3.2.22) 的推导中，定理 3.2.1 中关于 (3.2.1) 的系数的光滑性要求可以减弱，象 [125]对双曲型方程和 [27] 对 (3.2.1) 型方程所做的那样.

注 2 对于两个变量的 (3.2.1) 型方程

$$u_{tt} - \lambda^2(t)K^2(t, x)u_{xx} + a(t, x)u_x + b(t, x)u_t + c(t, x)u = f(t, x) \tag{3.2.27}$$

的情况，其中 $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(t) \geqslant 0$, $t > 0$ 时 $\lambda(t) > 0$，并且 $K(t, x) \geqslant \text{const} > 0$. 从定理 3.2.1 推得，如果

$$\alpha t a^2 \leqslant 2\lambda_t \lambda K^2 + \lambda^2 (K^2)_t \tag{3.2.28}$$

而且方程的系数、函数 f 和初值函数 φ 与 ψ 都充分光滑，则 Cauchy 问题 (3.2.27), (3.2.2) 是适定的. 如果 $\lambda = t^\beta$ 而 $K = 1$，则条件 (3.2.28) 取形式

$$t^{1-\beta}|a| < (2\beta(2p + 6))^{1/2} \tag{3.2.29}$$

在论文 [10, 12, 83, 106]中研究过问题 (3.2.27),(3.2.2). 在[83]中用积分方程的方法获得问题(3.2.27),(3.2.2)适定性的条件. 它类似于 (3.2.29). 特别是在 [10, 42] 中证明了当 $\lambda(t) = t^\beta$ 并且 $\beta > 1$ 时问题 (3.2.27),(3.2.2) 可能不适定.

在 [18] 中获得方程

$$u_{tt} - t^2 u_{xx} = a u_x (t > 0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

的 Cauchy 问题的一个显式解，其中 $a = \text{const}$, $a = 4n + 1$, $n \geqslant 0$ 是整数，初始条件为

$$u|_{t=0} = \mu(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$$

这个唯一解是

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\pi}\, t^{2k}}{k!(n-k)!\,\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{\partial^k \mu\left(x + \frac{t^2}{2}\right)}{\partial x^k}$$

这个公式揭示量 a 和要求初值函数光滑程度之间的依赖关系. 这种依赖性由不等式 (3.2.29) 来阐明.

注 3 从定理 3.2.1 的条件 (3.2.24) 推得：如果对于某向量

ξ，在点 (t_0, x_0) 上 $a^{kj}(t_0, x_0)\xi_k\xi_j = 0$，则对于这些 ξ，方程 $a^{kj}(t, x_0)\xi_k\xi_j = 0$ 对于所有的 $t \leqslant t_0$ 成立，因为根据 (3.2.24)，函数 $Z(t) = a^{kj}(t, x_0)\xi_k\xi_j$ 满足 $Z_t + AZ \geqslant 0$，而且当 $t = t_0$ 时 $Z = 0$。

为了允许讨论在区域内退化的更一般双曲型方程，我们证明以下引理。

引理 3.2.2 假设 $u_\varepsilon(t, x)$ 是在区域 $G_{T-\varepsilon}$ 内具有条件 (3.2.4) 的双曲型方程 (3.2.3) 的一个解，其中 a_ε^{kj}, b_ε^k, c_ε, b_ε^0, f_ε, φ_ε 和 ψ_ε 是在 $G_{T-\varepsilon}$ 内的无限次可微函数，而且 f_ε, φ_ε 和 ψ_ε 对于 x 有紧支集。假设对于每一个 ξ，在区间 $t_1 \leqslant t \leqslant T - \varepsilon$ 中不等式

$$\alpha(T-t-\varepsilon)(b_\varepsilon^k\xi_k)^2 \leqslant Aa_\varepsilon^{kj}\xi_k\xi_j - a_{\varepsilon t}^{kj}\xi_k\xi_j + a_\varepsilon^{kj}\xi_k\xi_j(T-t-\varepsilon)^{-1}\alpha^{-1} \tag{3.2.30}$$

成立，其中 t_1 是小于 T 的某个数，α 是满足 $\alpha > (2p+1)^{-1}$ 的常数，p 是非负整数，而 A 是常数。此外，假设在区间 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 中同样这个不等式对于某些常数（可能不同）$\alpha > 0$ 及 $A > 0$ 成立。则估计

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|^2_{G^\varepsilon,s} \leqslant C_s\{\|f_\varepsilon\|^2_{G^\varepsilon,s+p-2} + \|f_\varepsilon\|^2_{G^\varepsilon,0,s+p,s+p} \\ + \|\varphi_\varepsilon\|_{0,s+p+1} + \|\psi_\varepsilon\|_{0,s+p}\}\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

成立，其中常数 C_s 依赖于系数 a_ε^{kj}, $a_{\varepsilon x_k}^{kj}$, b_ε^k, b_ε^0, c_ε 以及它们对 x 和 t 直到 $s+p-2$ 阶导数，对 x 直到 $s+p$ 阶导数的绝对值的最大值；这里 $G^\varepsilon = G_{T-\varepsilon}$。

证明 用 $u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta t}$ 乘方程 (3.2.3)，并且在区域 $G^\varepsilon\{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon, x \in R^m\}$ 上积分。这里 $\theta = \text{const} > 0$ 而 $N = 2p+1$。我们用分部积分将所得方程各项变换如下：

$$\begin{aligned}[u_{tt}, u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} = \frac{1}{2}[Nu_t, u_t(T-t-\varepsilon)^{N-1}e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} \\ + \frac{1}{2}[u_t, u_t(T-t-\varepsilon)^N\theta e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} - \frac{1}{2}(u_t, u_t(T-\varepsilon)^N)_{t=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[\varepsilon u_{x_kx_k}, u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} \\ &= -\frac{\varepsilon}{2}[Nu_{x_k}, u_{x_k}(T-t-\varepsilon)^{N-1}e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}\end{aligned}$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} [u_{x_k}, (T - t - \varepsilon)^N u_{x_k} \theta e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon (u_{x_k}, u_{x_k} (T - \varepsilon)^N)_{t=0}$$

$$[(a_\varepsilon^{kl} u_{x_k})_{x_l}, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2} [a_{\varepsilon t}^{kl} u_{x_k}, u_{x_l} (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$- \frac{1}{2} [a_\varepsilon^{kl} u_{x_k}, N (T - t - \varepsilon)^{N-1} u_{x_l} e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$- \frac{1}{2} [a_\varepsilon^{kl} u_{x_k}, u_{x_l} (T - t - \varepsilon)^N \theta e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{2} (a_\varepsilon^{kl} u_{x_k}, u_{x_l} (T - \varepsilon)^N)_{t=0}$$

容易看出：如果 $\delta > 0$ 充分小，使得 $(2p + 1)^{-1} < 1/(N - \delta) < \alpha$，$\alpha$ 是不等式 (3.2.30) 中的常数，则估计

$$|[b_\varepsilon^k u_{x_k}, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$\leqslant \frac{1}{2(N - \delta)} [b_\varepsilon^k u_{x_k}, (T - t - \varepsilon)^{N+1} b_\varepsilon^k u_{x_k} e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon \setminus G_{t_1}}$$

$$+ \frac{N - \delta}{2} [u_t, u_t e^{-\theta t} (T - t - \varepsilon)^{N-1}]_{G^\varepsilon \setminus G_{t_1}}$$

$$+ \frac{\alpha}{2} [b_\varepsilon^k u_{x_k}, (T - t - \varepsilon)^{N+1} b_\varepsilon^k u_{x_k} e^{-\theta t}]_{G_{t_1}}$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} [u_t, u_t e^{-\theta t} (T - t - \varepsilon)^{N-1}]_{G_{t_1}}$$

成立. 此外

$$[b_\varepsilon^0 u_t, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} + [c_\varepsilon u, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$\leqslant C_2 [u_t, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} + C_3 [u, u (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$[f_\varepsilon, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon} \leqslant [f_\varepsilon, f_\varepsilon (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ [u_t, u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}; \quad C_2, C_3 = \text{const}$$

显而易见，对于任意光滑函数 v 和 $N \geqslant 3$，关系式

$$-(T-\varepsilon)^{N-2}v^2|_{t=0}=\int_0^{T-\varepsilon}2(T-t-\varepsilon)^{N-2}v_t v\,dt$$

$$-\int_0^{T-\varepsilon}(N-2)(T-t-\varepsilon)^{N-3}v^2dt$$

成立．由此，对于 $N\geqslant 3$ 有

$$\left[\left(N-\frac{3}{2}\right)(T-t-\varepsilon)^{N-3}v,\ v\right]_{G^\varepsilon}$$

$$\leqslant T^{N-2}(v,\ v)_{t=0}+2[(T-t-\varepsilon)^{N-1}v_t,\ v_t]_{G^\varepsilon} \quad (3.2.32)$$

特别是，对于任意的 $N\geqslant 0$

$$[(T-t-\varepsilon)^N v,\ v]_{G^\varepsilon}\leqslant C_4\{[(T-t-\varepsilon)^N v_t,\ v_t]_{G^\varepsilon}+(v,\ v)_{t=0}\} \quad (3.2.33)$$

考虑上面所得的不等式和条件 (3.2.30)，以及分部积分后所得的表达式，并且选取 $\theta>0$ 充分大，从方程

$$[L_\varepsilon(u),\ e^{-\theta t}(T-t-\varepsilon)^N u_t]_{G^\varepsilon}=[f_\varepsilon,\ e^{-\theta t}(T-t-\varepsilon)^N u_t]_{G^\varepsilon}$$

得到

$$[u,\ u(T-t-\varepsilon)^{N-1}e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}+[u_t,\ u_t(T-t-\varepsilon)^{N-1}e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$
$$\leqslant C_5\{[f_\varepsilon,\ f_\varepsilon(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$
$$+(\varphi_{\varepsilon x_k},\ \varphi_{\varepsilon x_k})_{t=0}+(\psi_\varepsilon,\ \psi_\varepsilon)_{t=0}+(\varphi_\varepsilon,\ \varphi_\varepsilon)_{t=0}\}$$

其中常数 C_5 依赖于 a_ε^{kj}，b_ε，c_ε，T，δ 和 α.

现在我们假设，对于 $|l|\leqslant q-1$，已经得到形为

$$[D^l u,\ D^l u(T-t-\varepsilon)^{N-1}e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}+[D^l u_t, D^l u_t(T-t-\varepsilon)^{N-1}e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}$$
$$\leqslant C_l\left\{\sum_{|\gamma|\leqslant l}[D^\gamma f_\varepsilon,\ D^\gamma f_\varepsilon(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta t}]_{G^\varepsilon}\right.$$
$$\left.+\sum_{|\gamma|=|l|+1}(D^\gamma\varphi_\varepsilon,\ D^\gamma\varphi_\varepsilon)_{t=0}+\sum_{|\gamma|\leqslant|l|}(D^\gamma\psi_\varepsilon,\ D^\gamma\psi_\varepsilon)_{t=0}\right\} \quad (3.2.34)$$

的估计，其中系数 C_l 依赖于 a_ε^{kj}，$a_{\varepsilon x_k}^{kj}$，b_ε^k，b_ε^0，c_ε 及它们对 x 直到 $q-1$ 阶的导数．我们来证明对于 $|l|=q\leqslant s+p$，估计式 (3.2.34) 也成立．为此目的我们考察方程

$$[D^l L_\varepsilon(u),\ D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_l t}]_{G^\varepsilon}$$
$$=[D^l f_\varepsilon, D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_l t}]_{G^\varepsilon} \quad (3.2.35)$$

并且用分部积分变换它的各项，有

$$[D^l u_{tt},\ D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} = \frac{N}{2}[D^l u_t,\ D^l u_t(T-t-\varepsilon)^{N-1} e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} + \frac{1}{2}[D^l u_t,\ \theta_1 D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} - \frac{1}{2}(D^l u_t,\ D^l u_t(T-\varepsilon)^N)_{t=0}$$

用同样方法得到

$$[\varepsilon D^l u_{x_k x_k},\ D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{2}[N D^l u_{x_k},\ D^l u_{x_k}(T-t-\varepsilon)^{N-1} e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon[D^l u_{x_k},\ D^l u_{x_k}(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}\theta_1]_{G^\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}(D^l u_{x_k},\ D^l u_{x_k}(T-\varepsilon)^N)_{t=0}$$

容易看出

$$[D^l(a_\varepsilon^{kj} u_{x_k})_{x_j}, D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} = \frac{1}{2}(a_\varepsilon^{kj} D^l u_{x_k},\ D^l u_{x_j}(T-\varepsilon)^N)_{t=0} - \frac{N}{2}[a_\varepsilon^{kj} D^l u_{x_k},\ D^l u_{x_j}(T-t-\varepsilon)^{N-1} e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} + \frac{1}{2}[a_{\varepsilon t}^{kj} D^l u_{x_k}, D^l u_{x_j}(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} - \frac{1}{2}[a_\varepsilon^{kj} D^l u_{x_k},\ D^l u_{x_j}\theta_1(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} - \sum_{|\gamma|=1}[a_{\varepsilon x_p}^{kj} D^{l-\gamma} u_{x_k},\ D^l u_{t x_j}(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon} + \sum_{|\gamma|\geq 2} C_\gamma[(D^\gamma(a_\varepsilon^{kj}) D^{l-\gamma} u_{x_k})_{x_j}, D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon},\ C_\gamma = \text{const} \tag{3.2.36}$$

应用不等式(3.2.18)，我们来估计(3.2.36)的最后第二项．对于 $|\gamma| = 1$，有

$$|[a_{\varepsilon x_p}^{kj} D^{l-\gamma} u_{x_k},\ D^l u_{t x_j}(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}| = |[a_{\varepsilon x_p x_j}^{kj} D^{l-\gamma} u_{x_k},\ D^l u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ [a^{kj}_{\varepsilon x_p} D^{l-\gamma} u_{x_k x_j}, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$\leqslant M [a^{kj}_\varepsilon D^{l-\gamma} u_{x_k x_p}, D^{l-\gamma} u_{x_p x_j} (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ C_6 [D^l u_t, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ C_7 \sum_{|l| \leqslant q} [D^l u, D^l u (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}$$

其中 M，C_6 和 C_7 依赖于 a^{kj}_ε 对 x 直到二阶的导数．(3.2.36)的最后一项显然不超过

$$C_8 \sum_{|\gamma| \leqslant q} \{[D^\gamma u, D^\gamma u (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ [D^\gamma u_t, D^\gamma u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}\}$$

其中 C_8 依赖于 a^{kj}_ε，$a^{kj}_{\varepsilon x_k}$ 及它们对 x 直到 q 阶的导数．

此外，

$$|[D^l b^k_\varepsilon u_{x_k}, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$\leqslant |[b^k_\varepsilon D^l u_{x_k}, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$+ |\sum_{1 \leqslant |\gamma| \leqslant q} C_\gamma [D^\gamma b^k_\varepsilon D^{l-\gamma} u_{x_k}, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$\leqslant \frac{1}{2(N-\delta)} [b^k_\varepsilon D^l u_{x_k}, b^k_\varepsilon D^l u_{x_k} (T - t - \varepsilon)^{N+1} e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon \setminus G_{t_1}}$$

$$+ \frac{1}{2} (N - \delta) [D^l u_t, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^{N-1} e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon \setminus G_{t_1}}$$

$$+ \frac{\alpha}{2} [b^k_\varepsilon D^l u_{x_k}, b^k_\varepsilon D^l u_{x_k} (T - t - \varepsilon)^{N+1} e^{-\theta_1 t}]_{G_{t_1}}$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} [D^l u_t, D^l u_t (T - t - \varepsilon)^{N-1} e^{-\theta_1 t}]_{G_{t_1}}$$

$$+ C_9 \sum_{|\gamma| \leqslant q} \{[D^\gamma u_t, D^\gamma u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}$$

$$+ [D^\gamma u, D^\gamma u (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}\}$$

这里 α 是 (3.2.30) 中的常数，δ 是充分小的正数，$C_9 = \text{const}$．容易看出

$$|[D^l(b^0_\varepsilon u_t), D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$+ |[D^l(c_\varepsilon u), D^l u_t (T - t - \varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}|$$

$$\leqslant C_{10}\left\{\sum_{|\gamma|\leqslant q}[D^\gamma u_t, D^\gamma u_t(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}\right.$$
$$\left.+\sum_{|\gamma|\leqslant q}[D^\gamma u, D^\gamma u(T-t-\varepsilon)^N e^{-\theta_1 t}]_{G^\varepsilon}\right\}$$

常数 C_{10} 依赖于方程 (3.2.3) 的系数及其对 x 直到 q 阶的导数. 记住所得的估计、不等式 (3.2.33)、条件 (3.2.30), 并且选取常数 θ_1 充分大, 从 (3.2.35) 我们得到估计 (3.2.34) 对于 $|l|=q\leqslant s+p$ 仍成立.

从 (3.2.3) 及其对 x 和 t 微分所得的方程可得含 u_ε 对 t 高于一次微分的导数的表达式. 从而应用 $|l|\leqslant s+p$ 的 (3.2.34), 可以估计这些导数. 因此对于 $|l|+\rho\leqslant s+p$, 我们得到

$$\left[D^l\frac{\partial^\rho u}{\partial t^\rho}, D^l\frac{\partial^\rho u}{\partial t^\rho}(T-t-\varepsilon)^{N-1}\right]_{G^\varepsilon}$$
$$\leqslant C_{11}\{\|f_\varepsilon\|^2_{G^\varepsilon,s+p-2}+\|f_\varepsilon\|^2_{G^\varepsilon,0,s+p,s+p}$$
$$+\|\varphi_\varepsilon\|^2_{0,s+p+1}+\|\phi_\varepsilon\|^2_{0,s+p}\} \qquad (3.2.37)$$

从不等式 (3.2.32) 和估计 (3.2.37) 得到: 如果 $N=2p+1$, 则 $u_\varepsilon(t,x)$ 满足不等式 (3.2.31).

从这个引理容易推出下面的定理.

定理 3.2.2 假设方程 (3.2.1) 的系数对于每一个 ξ 和区间 $t_1\leqslant t\leqslant T$ 的 t (t_1 是比 T 小的某数) 满足不等式

$$\alpha(T-t)(b^k\xi_k)^2\leqslant Aa^{kj}\xi_k\xi_j-a_t^{kj}\xi_k\xi_j+\frac{a^{kj}\xi_k\xi_j}{\alpha(T-t)} \qquad (3.2.38)$$

其中 α 是满足 $\alpha>(2p+1)^{-1}$ 的常数 (p 是非负整数) 而且 A 是常数. 再假设在区间 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 中对于某些 (可能不同) 常数 $\alpha>0$ 和 $A>0$ 满足 (3.2.38). 假设系数 a^{kj}, $a^{kj}_{x_k}$, b^k, b^0 和 c 对 x 和 t 的直到 $s+p-2$ 阶的导数 ($s\geqslant 2$), 对 x 直到 $s+p$ 阶的导数都有界. 如果 f, φ 和 ϕ 对于 x 有紧支集并且在 (3.2.39) 中出现的范数有界, 则在 $\mathscr{H}^s(G_T)$ 类中问题 (3.2.1), (3.2.2) 存在唯一解 $u(t,x)$, 而且对这个解成立估计

$$\|u\|^2_{G_T;s}\leqslant C_{12}\{\|f\|^2_{G_T;s+p-2}+\|f\|^2_{G_T;0,s+p,s+p}$$

$$+\|\varphi\|^2_{0,s+p+1}+\|\psi\|^2_{0,s+p}\} \tag{3.2.39}$$

证明 象在定理 3.2.1 的证明中那样，我们磨光方程(3.2.1)的系数以及函数 f,φ,ψ，并且考虑问题(3.2.3)，(3.2.4)，其中(3.2.3)的系数和函数 $f_\varepsilon,\varphi_\varepsilon$ 以及 ψ_ε 由(3.2.26)来定义。对于问题(3.2.3)，(3.2.4)，我们验证引理 3.2.2 的条件(3.2.30)是满足的。为此目的我们应用算子 $\tilde{P}_\varepsilon$ 于(3.2.38)的左右两端。

对于 $0\leqslant t\leqslant T-\varepsilon$，我们得到不等式

$$\alpha\tilde{P}_\varepsilon[(T-t)(b^k\xi_k)^2]\leqslant A\tilde{P}_\varepsilon[a^{kj}\xi_k\xi_j]$$
$$-\tilde{P}_\varepsilon[a_t^{kj}\xi_k\xi_j]+\frac{1}{\alpha}\tilde{P}_\varepsilon\left[\frac{a^{kj}\xi_k\xi_j}{T-t}\right] \tag{3.2.40}$$

容易看出

$$\tilde{P}_\varepsilon[(T-t)(b^k\xi_k)^2]\geqslant(T-t-\varepsilon)\tilde{P}_\varepsilon[(b^k\xi_k)^2]$$
$$\geqslant(T-t-\varepsilon)(b_\varepsilon^k\xi_k)^2$$
$$\tilde{P}_\varepsilon[a_t^{kj}\xi_k\xi_j]=a_{\varepsilon t}^{kj}\xi_k\xi_j$$
$$\frac{1}{\alpha}\tilde{P}_\varepsilon\left[\frac{a^{kj}\xi_k\xi_j}{T-t}\right]\leqslant\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(T-t-\varepsilon)}a_\varepsilon^{kj}\xi_k\xi_j$$

从这些估计和(3.2.40)推出条件(3.2.30)。我们得到问题(3.2.1)，(3.2.2)的解作为问题(3.2.3)，(3.2.4)的解当 $\varepsilon\to 0$ 的极限。显然对于极限函数 $u(t,x)$ 不等式(3.2.39)成立。

注 4 从条件(3.2.38)推得：如果在点 (t_0,x_0) 上对于某些向量 ξ，$a^{kj}(t_0,x_0)\xi_k\xi_j=0$，则对于这些 ξ，方程 $a^{kj}(t,x_0)\xi_k\xi_j=0$ 对于所有的 $T\geqslant t\geqslant t_0$ 成立。

从定理 3.2.1 和 3.2.2 容易推得一个定理，允许方程(3.2.1)在更一般结构的集合上退化，特别是仅在个别点上退化。

定理 3.2.3 假设区域 G_T 可以分为有限个区域 $G^j\{T_{j-1}\leqslant t\leqslant T_j,\ x\in R^m\}$，使得在每一个 G^j 内，或者满足定理 3.2.1 的条件

$$\alpha(t-T_{j-1})(b^k\xi_k)^2\leqslant Aa^{kj}\xi_k\xi_j+a_t^{kj}\xi_k\xi_j$$

或者满足定理 3.2.2 的条件

$$\alpha(T_i - t)(b^k\xi_k)^2 \leqslant A\, a^{kl}\xi_k\xi_l + \frac{a^{kl}\xi_k\xi_l}{\alpha(T_i - t)} - a_t^{kl}\xi_k\xi_l$$

常数 α 和 A 满足相应定理所述的要求。 如果方程 (3.2.1) 的系数和函数 f, φ 以及 ψ (有紧支集)足够光滑，则在 G_T 内问题 (3.2.1), (3.2.2) 在 $\mathscr{H}^{s}(G_T)$ 类中存在唯一解 $u(t, x)$。 即我们要求的光滑性提供在每个区域 G^i 内满足定理 3.2.1 或者定理 3.2.2 的条件，这些条件将保证在 G^i 内具有初值函数 $u|_{t=T_{i-1}}$ 和 $u_t|_{t=T_{i-1}}$ 的方程 (3.2.1) 在 $\mathscr{H}^{s}(G^i)$ 类中解的存在性。

在区域 G^i 内定理 3.2.3 是连续地应用定理 3.2.1 和 3.2.2 来证明的。

例如，从定理 3.2.3 推出，方程

$$u_{tt} - t^2(2-t)^2[(1-t)^2 + x^2]u_{xx} + au_x + bu_t + cu = f$$

具有条件 (3.2.2) 的 Cauchy 问题，如果方程的系数和函数 f, φ 以及 ψ 在 G_T 内充分光滑，则总是适定的(即 Cauchy 问题的解存在、唯一且按某种范数连续依赖于初始数据)。

§3. 二阶方程 Cauchy 问题适定性的必要条件*)

E. E. Levi[74], A. Lax[72], P. Lax[73], Mizohata 和 Ohya[82], Strang 和 Flaschka[127], В. Я. Иврий[62], В. М. Петков[116] 等等在各种假设下研究任意阶微分方程 Cauchy 问题适定性的必要条件问题。 下面的阐述用到这些文章中建立的一些概念。

假设 Ω 是 $R^{m+1} = \{x_0, \cdots, x_m\}$ 中的这样一个区域：其边界包含超平面 $x_0 = h$ 上的区域 ω，而且 Ω 的所有点满足 $x_0 > h$. 特别是，Ω 可以是 $\{h < x_0 < T, (x_1, \cdots, x_m) \in R^m\}$ 型的区域，$T = \text{const} \leqslant \infty$.

在 $\bar{\Omega}$ 内，我们考虑方程

---

*) 由作者添加到英译本。

$$L(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x) \qquad (3.3.1)$$

其中 $a_\alpha(x)$ 和 $f(x)$ 是在 $\bar{\Omega}$ 上给定的无限次可微的复值函数. 这里和以后

$$D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j=0,1,\cdots,m;\ i^2=-1;$$

$$D^\alpha=D_0^{\alpha_0}\cdots D_m^{\alpha_m};\ |\alpha|=\alpha_0+\cdots+\alpha_m;\alpha!=\alpha_0!\cdots\alpha_m!$$

在区域 Ω 内我们考虑方程(3.3.1)具有初始条件

$$u|_{x\in\omega}=g_0,\ D_0u|_{x\in\omega}=g_1 \qquad (3.3.2)$$

的 Cauchy 问题，其中 g_0 和 g_1 是 ω 内的给定函数. Cauchy 问题(3.3.1), (3.3.2)在 Ω 内称为适定的：如果对于支集在 $\Omega\cup\omega$ 内的任意函数 $f(x)\in C_0^\infty(R^{m+1})$ 和任意函数 $g_0, g_1\in C_0^\infty(\omega)$, 在 $\bar{\Omega}$ 内存在一个满足条件 (3.3.2) 的方程 (3.3.1) 的解 $u(x)\in C^{(2)}(\bar{\Omega})$; 此外，在 $\bar{\Omega}\cap\{x_0\leqslant h^1\}$ (对某 $h^1\geqslant h$) 内 $f(x)=0$ 和在 ω 内 $g_0(x)=0$, $g_1(x)=0$ 的条件一起可推得在 $\bar{\Omega}\cap\{x_0\leqslant h^1\}$ 内 $u(x)=0$.

引理 3.3.1 假设 Cauchy 问题 (3.3.1),(3.3.2) 在区域 Ω 内是适定的. 则对每一个使得 $K\cap\omega$ 是非空的紧集 $K\subset\Omega\cup\omega$, 存在一个整数 $k\geqslant 0$ 和常数 $C>0$, 使得对于任意的函数 $f\in C_0^\infty(K)$ 和任意的 $g_0, g_1\in C_0^\infty(K\cap\omega)$, 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的解 $u(x)$ 满足不等式

$$\sup_{\bar{\Omega}}|u|\leqslant C\left\{\sup_K\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha f|+\sup_{K\cap\omega}\sum_{|\alpha|\leqslant k}(|D^\alpha g_0|+|D^\alpha g_1|)\right\}$$

$$(3.3.3)$$

证明 在函数 (f, g_0, g_1) 的线性空间 M_K 中，其中 $f\in C_0^\infty\cdot(R^{m+1})$, $\mathrm{supp}f\subset K$, $g_0, g_1\in C_0^\infty(\omega)$, $\mathrm{supp}g_0\subset K\cap\omega$ 和 $\mathrm{supp}g_1\subset K\cap\omega$, 我们引进半模的可数系

$$p_j(f, g_0, g_1)=\sup_K\sum_{|\alpha|\leqslant j}|D^\alpha f|+\sup_{K\cap\omega}\sum_{|\alpha|\leqslant j}(|D^\alpha g_0|+|D^\alpha g_1|)$$

对于所得 F 空间的每一个元素 (f, g_0, g_1), 我们联系 Cauchy 问题 (3.3.1), (3.3.2) 的解 $u(x)\in C^{(2)}(\bar{\Omega})$, 于是在 M_K 上定义一个算子

T. 因为由假设 Cauchy 问题(3.3.1),(3.3.2)在 Ω 内是适定的,容易看出,算子 T 的图是闭的. 因此由 F 空间的闭图定理,算子 T 是连续的. 这表示存在一个整数 $k\geqslant 0$ 和 $C=\text{const}>0$,使得对于任意的 $(f,g_0,g_1)\in M_K$,对于 Cauchy 问题(3.3.1),(3.3.2)的解 $u(x)$,不等式(3.3.3)成立. 引理证毕.

令 $0\leqslant l<m$. 引入记号

$x'=(x_0,\cdots,x_l,0,\cdots,0)$, $x''=(0,\cdots,0,x_{l+1},\cdots,x_m)$

$\xi'=(\xi_0,\cdots,\xi_l,0,\cdots,0)$, $\xi''=(0,\cdots,0,\xi_{l+1},\cdots,\xi_m)$

则 $x=x'+x''$, $\xi=\xi'+\xi''$. 对于多重指标,我们也引入相应的记号

$\alpha'=(\alpha_0,\cdots,\alpha_l,0,\cdots,0)$, $\alpha''=(0,\cdots,0,\alpha_{l+1},\cdots,\alpha_m)$

$\alpha=\alpha'+\alpha''$,同样地,$\beta=\beta'+\beta''$.

我们将方程(3.3.1)写为形式

$$L(u)=\sum_{s=0}^{2}L_s(x,D)u=f(x) \tag{3.3.4}$$

其中

$$L_s(x,D)u=\sum_{|\alpha|=s}a_\alpha(x)D^\alpha u$$

令

$$L_s(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=s}a_\alpha(x)\xi^\alpha;\quad L^{(\alpha)}_{s,\beta}(x,\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha L_s(x,\xi)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta=\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{\beta_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\beta_m},\quad \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^{\alpha_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)^{\alpha_m}$$

定理 3.3.1 假设对于使得 $a_{(2,0,\cdots,0)}(\hat{x})\neq 0$ 的某些点 $\hat{x}=(\hat{x}_0,\cdots,\hat{x}_m)\in\Omega\cup\omega$,存在正有理数 p_1, p_2,使得

$$1-p_1+p_2>0 \tag{3.3.5}$$

并且使得对于任意的 ξ'',有

$$L^{(\alpha')}_{2,\beta}(\hat{x},\xi'')=0 \tag{3.3.6}$$

只要

$$|\alpha'|+p_1|\beta'|+p_2|\beta''|<2 \tag{3.3.7}$$

那么，如果 Cauchy 问题(3.3.1)，(3.3.2)在区域 Ω 内是适定的，则推得对于任意的 ξ''，

$$L_{1,\beta}(x,\xi'')=0 \tag{3.3.8}$$

只要

$$p_1(1+|\beta'|)+p_2|\beta''|<1 \tag{3.3.9}$$

证明 假设不然．设 Cauchy 问题(3.3.1)，(3.3.2)在 Ω 内是适定的，并且假设存在 β，使得对一些 ξ''，有 $L_{1,\beta}(x,\xi'')\neq 0$ 而 $p_1(1+|\beta'|)+p_2|\beta''|<1$．

此时我们将证明：存在一紧集 $K\subset\Omega\cup\omega$ 和 M_K 中的函数 f，g_0，g_1，使得 Cauchy 问题(3.3.1)，(3.3.2)对应的解 $u(x)$ 不满足不等式(3.3.3)．为了构造问题(3.3.1)，(3.3.2)的这种解，我们进行如下．令 t 是 $t\geqslant p_1$ 的有理数．用 $\mathfrak{M}_t$ 表示使得

$$R_\beta(t)=t(1+|\beta'|)+p_2|\beta''|\leqslant 1 \tag{3.3.10}$$

并且对于其 $\xi''\neq 0$，$L_{1,\beta}(x,\xi'')\neq 0$ 的多重指标 $\beta=\beta'+\beta''$ 的集合．显然，如果 $t_1>t_2$，则 $\mathfrak{M}_{t_1}\subset\mathfrak{M}_{t_2}$．用 E_t 表示在 $\mathfrak{M}_{p_1}$ 中使得不等式

$$R_\beta(t)>2(p_2-t)-1 \tag{3.3.11}$$

成立的那些 β 的集合．

我们可以假设定理 3.3.1 条件中的数 p_1 和 p_2 是这样的：对于任意多重指标 $\beta\in\mathfrak{M}_{p_1}$，有

$$R_\beta(p_1)>2(p_2-p_1)-1 \tag{3.3.12}$$

因为如果对于某些 $\beta_*\in\mathfrak{M}_{p_1}$，不等式(3.3.12)不满足，则我们可以证明：存在一个有理数 $t>p_1$ 使得 $\mathfrak{M}_t$ 非空并且对于任意的 $\beta\in\mathfrak{M}_t$：

$$R_\beta(t)>2(p_2-t)-1$$

我们取这个 t 值作为 p_1 的新值．

事实上，假设存在一个 $\beta_*\in\mathfrak{M}_{p_1}$，使得 $R_{\beta*}(p_1)\leqslant 2(p_2-p_1)-1$．如果

$$t_1>(2p_2+p_1(1+|\beta'_*|)-R_{\beta*}(p_1)-1)(3+|\beta'_*|)^{-1}=K_1$$

则容易看出

$$R_{\beta*}(t_1) = R_{\beta*}(p_1) + (t_1 - p_1)(1 + |\beta'_*|) > 2(p_2 - t_1) - 1$$

另一方面，如果

$$t_1 < (1 - R_{\beta*}(p_1) + p_1(1 + |\beta'_*|))(1 + |\beta'_*|)^{-1} = K_2$$

则 $R_{\beta*}(t_1) < 1$. 显然 $K_2 > 0$，这是因为 $R_{\beta*}(p_1) < 1$，而且

$$K_2 - K_1 = [2(1 - R_{\beta*}(p_1)) + 2(1 - p_2 + p_1)(1 + |\beta'_*|)](1 + |\beta'_*|)^{-1}(3 + |\beta'_*|)^{-1} > 0$$

因为由假设 $1 - p_2 + p_1 > 0$ 和 $1 - R_{\beta*}(p_1) > 0$，所以这关系成立。因此存在正的有理数 t_1，使得

$$1 > R_{\beta*}(t_1) > 2(p_2 - t_1) - 1$$

我们取 $t_1 = K_2 - \varepsilon$，其中 $\varepsilon = \text{const} > 0$，而且 $\varepsilon < (1 - R_{\beta*}(p_1)) \cdot (1 + |\beta'_*|)^{-1}$. 则 $t_1 > p_1$；因此 $\mathfrak{M}_{t_1} \subset \mathfrak{M}_{p_1}$，而且 $\mathfrak{M}_{t_1}$ 非空. 容易看出，如果 $\beta \in E_{p_1}$，因为

$$R_\beta(t_1) = R_\beta(p_1) + (t_1 - p_1)(1 + |\beta'|)$$
$$> 2(p_2 - t_1) - 1 + 2(t_1 - p_1) + (t_1 - p_1)(1 + |\beta'|) > 2(p_2 - t_1) - 1$$

则 $\beta \in E_{t_1}$. 此外，如果存在多重指标 $\beta \in \mathfrak{M}_{t_1}$，使得 $R_\beta(t_1) \leqslant 2(p_2 - t_1) - 1$，则如上所述，我们可以求得一个有理数 $t_2 > t_1$，使得

$$1 > R_\beta(t_2) > 2(p_2 - t_2) - 1$$

因为 $E_{t_1} \subset E_{t_2}$ 而且 E_{t_2} 与 E_{t_1} 最多差一个元素，而且集合 $\mathfrak{M}_{p_1}$ 是有限的，我们可以继续用这种方法经过有限步骤后，得到一个有理正数 t，使得 $t > p_1$，$\mathfrak{M}_t$ 非空，并且 $\mathfrak{M}_t \subset E_t$. 我们取这个 t 作为 p_1 的新值. 所以对于所有的 $\beta \in \mathfrak{M}_{p_1}$，(3.3.12) 显然满足.

不失一般性，在定理条件下，我们可以假设 $\xi = 0$. 做变量 x 的变换：

$$y' = \rho^\kappa x', \quad y'' = \rho^\tau x''; \kappa, \ \tau = \text{const} > 0, \ \rho = \text{const} > 1 \tag{3.3.13}$$

和变量 ξ 的相应变换：

$$\eta' = \rho^{-\kappa}\xi', \quad \eta'' = \rho^{-\tau}\xi''$$

如果估计 (3.3.3) 成立，则对于新变量 y，估计

$$\sup_{\Omega_1}|u| \leqslant C\rho^{k\delta}\left\{\sup_{K_1}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha f| + \sup_{K_1\cap\omega_1}\sum_{|\alpha|\leqslant k}(|D^\alpha g_0| + |D^\alpha g|)\right\}$$

$$(3.3.14)$$

成立，其中 Ω_1，ω_1 和 K_1 分别是 Ω，ω 和 K 在 y 空间的象，而且 $\delta = \max(\tau, \kappa)$. 在点 $x=0$ 的某邻域 $\hat{G}$ 内，我们将算子 L_s 的象征表示为 Taylor 级数的部分和形式. 因此我们得到

$$L_s(x, \xi) = \sum_{\alpha', \beta, \lambda_s(\alpha', \beta) > -N} \frac{x^\beta}{\alpha'!\beta!} L_{s,\beta}^{(\alpha')}(0, \xi'')\xi'^{\alpha'} + R_N(x, \xi)$$

$$= \sum_{\alpha', \beta, \lambda_s(\alpha', \beta) > -N} \rho^{\lambda_s(\alpha', \beta)} \frac{y^\beta}{\alpha'!\beta!} L_{s,\beta}^{(\alpha')}(0, \eta'')\eta'^{\alpha'}$$

$$+ \rho^{-N}\sum_{\alpha = s} b_\alpha \eta^\alpha \qquad (3.3.15)$$

其中 $b\alpha$ 是在 $\hat{G}$ 内关于 ρ 一致有界的函数，$L_{s,\beta}^{(\alpha')}$ 是象征 $L_s(x, \xi)$ 对于旧变量的相应导数，N 是将在后面定义的某个正整数，而且

$$\lambda_s(\alpha', \beta) = \tau(s - |\alpha'| + |\beta''|) + \kappa(|\alpha'| - |\beta'|) \qquad (3.3.16)$$

我们假设在点 $x=0$ 上满足条件 (3.3.6) 和 (3.3.7)，但不满足条件 (3.3.8) 和 (3.3.9)。考虑集合 $\mathfrak{M}_{p_1}$，并令

$$R = \min_{\beta \in \mathfrak{M}_{p_1}} R_\beta(p_1) \qquad (3.3.17)$$

令 μ 是使得 $R_\beta(p_1) = R$ 的那些 $\beta \in \mathfrak{M}_{p_1}$ 的点集. 因此存在 $\eta'' = \hat{\eta}'' \neq 0$ 和一个多重指标 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}', \hat{\beta}'') \in \mu$，使得 L_1, $\hat{\beta}(0, \hat{\eta}'') \neq 0$.

在点 $x = 0$ 的一个邻域内，我们构造方程 $L(u) = 0$ 的如下形式的渐近解 u_ρ

$$u_\rho(y) = \sum_{k=0}^{N_1} v^k(y)\rho^{-\frac{k}{n}} \exp i\left[(y'', \hat{\eta}'')\gamma\rho + \sum_{j=0}^{N_2}\varphi^j(y)\rho^{\sigma_j}\right] \qquad (3.3.18)$$

其中 σ_j 是某个有理数，$1 > \sigma_0 > \cdots > \sigma_{N_2} > 0$，$n$ 是正整数，γ 是实数，$\gamma \neq 0$，$(y'', \hat{\eta}'') = \sum_{l+1}^{m} y_j\hat{\eta}_j$；$N_1$ 和 N_2 是整数；函数 $v^k(y)$，$\varphi^j(y)$ 和数 σ_j，n，N_1，N_2，γ 和 ρ 将在下面定义.

我们令

$$W = \exp i[(y'', \hat{\eta}'')\gamma\rho + \varphi^0(y)\rho^{\sigma_0}]$$

$$w = \exp i\left[\sum_{j=1}^{N_1} \varphi^j(y)\rho^{\sigma_j}\right], \quad v = \sum_{k=0}^{N_1} v^k(y)\rho^{-\frac{k}{n}}$$

$$L_{[\rho,N]} \equiv \sum_{s,\lambda_s > -N} \rho^{\lambda_s} \frac{y^\beta}{\alpha'!\beta!} L_{s,\beta}^{(\alpha')}(0, D'')D'^{\alpha'} \tag{3.3.19}$$

由 Leibniz 公式有

$$L_{[\rho,N]}(u_\rho) = L_{[\rho,N]}(W)wv + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{1}{\alpha!} L_{[\rho,N]}^{(\alpha)}(W)D^\alpha(vw) \tag{3.3.20}$$

容易看出

$$L_{[\rho,N]}(W) = W\Big[\sum_{s,\lambda_s > -N} \frac{\rho^{\lambda_s} y^\beta}{\alpha'!\beta!} \sum_{\alpha''} \frac{1}{\alpha''!} L_{s,\beta}^{(\alpha'+\alpha'')}(0, \gamma\hat{\eta}'')$$

$$\cdot \rho^{s-|\alpha'+\alpha''|(1-\sigma_0)}((\varphi^0_{y_0})^{\alpha_0}\cdots(\varphi^0_{y_m})^{\alpha_m}$$

$$+ Q_\alpha(\rho, y))\Big] \tag{3.3.21}$$

其中 $Q_\alpha(\rho, y)$ 由包含 φ^0 的二阶导数的项组成. 我们将证明, 对于选取确定的 κ, τ 和 σ_0, 在表达式 (3.3.21) 中 ρ 的最高幂等于 $\nu = 2(\kappa + \sigma_0)$, 并且与在含 $(\varphi^0_{y_0})^2$ 的项中 ρ 的幂次相同. 我们令 $q^{-1} = 1 - p_2 + p_1$. 由于定理的条件 (3.3.5), 数 $q > 0$. 我们现在选取

$$\sigma_0 = \frac{q}{2}(1 - R) = \frac{q}{2}[1 - p_1(1 + |\hat{\beta}'|) - p_2|\hat{\beta}''|]$$

$$\kappa = qp_1, \quad \tau = qp_2 \tag{3.3.22}$$

因为 $2(p_2 - p_1) - 1 < R < 1$, 显然 $0 < \sigma_0 < 1$. 在 (3.3.21) 包含因子 $L_{s,\beta}^{(\alpha)}(0, \gamma\hat{\eta}'')(\varphi^0_y)^\alpha$ 的项中, ρ 的指数将记为 $J(s, \alpha, \beta)$. 我们将证明: 只要 $L_{s,\beta}^{(\alpha)}(0, \gamma\hat{\eta}'') \neq 0$, 总有 $\nu - J(s, \alpha, \beta) \geq 0$.

我们有

$$\nu - J(s, \alpha, \beta) = \nu - [\lambda_s + s - |\alpha' + \alpha''|(1 - \sigma_0)]$$

$$= |\alpha''|(1 - \sigma_0) + q[(2 - s)(1 + p_1) + p_1|\beta'|$$

$$+ p_2|\beta''| - (2 - |\alpha'|)(1 - q^{-1}\sigma_0)]$$

$$= |\alpha''|(1-\sigma_0) + q[(2-s)(1+p_1) + p_1|\beta'| + p_2|\beta''| - \frac{(2-|\alpha'|)}{2}(1+p_1(1+|\hat{\beta}'|) + p_2|\hat{\beta}''|)] \quad (3.3.23)$$

如果 $s=1, \beta \in \mathfrak{M}_{p_1}$,或者 $s=0$,由 $\hat{\beta}$ 的定义和 $\sigma_0 < 1, p_1(1+|\hat{\beta}'|) + p_2|\hat{\beta}''| < 1$ 而且对于每一个 $\beta \in \mathfrak{M}_p$ 有 $R_{\hat{\beta}}(p_1) \leqslant R_\beta(p_1)$ 的事实,则对于每一个 α 显然 $\nu - J(s, \alpha, \beta) \geqslant 0$,我们注意到,如果 $s=1, \alpha'=0, \alpha''=0, \beta \in \mu$,则在这种情形下 $\nu - J(s, \alpha, \beta) = 0$。假设 $s=1$ 而且 $\hat{\beta}$ 不属于 $\mathfrak{M}_{p_1}$。那么,如果 $|\alpha'|=1$,由于

$$\frac{2-|\alpha'|}{2}(1+p_1(1+|\hat{\beta}'|) + p_2|\hat{\beta}''|) < 1$$

我们有 $\nu - J(s,\alpha,\beta) > 0$。但如果 $|\alpha''|=1$ 且 $L_{1,\beta}^{(\alpha'')}(0, \gamma\hat{\eta}'') \neq 0$,则显然对于某些 $\eta'' \neq 0$,有 $L_{1,\beta}(0, \gamma\eta'') \neq 0$。从而 $(1+|\beta'|)p_1 + p_2|\beta''| > 1$,并且从关系式 (3.3.23) 推出在这种情形中,$\nu - J(s,\alpha,\beta) > 0$。

如果 $s=2$ 而且 $L_{2,\beta}^{(\alpha'+\alpha'')}(0, \gamma\hat{\eta}'') \neq 0$,则存在一个点 η'',使得 $L_{2,\beta}^{(\alpha')}(0, \gamma\eta'') \neq 0$,因此,由条件 (3.3.6) 和 (3.3.7),我们有 $p_1|\beta'| + p_2|\beta''| \geqslant 2 - |\alpha'|$.从而在这种情形中 $\nu - J(s, \alpha, \beta) \geqslant 0$ 并且只有当 $\alpha''=0$, $|\alpha'|=2$ 而且 $\beta=0$ 时 $\nu - J(s, \alpha, \beta) = 0$。

如果 n 是有理数 σ_0, qp_1, qp_2 和 q 的公分母,则在展开式 (3.3.21)中,ρ 的每个指数取形式 j/n,这里 j 是整数.令 $\nu = \nu_0/n$.则从前面的讨论和 (3 3.21) 推得

$$L_{[\rho,N]}(W) = W \sum_{j=0}^{N_3} A_j \rho^{\frac{\nu_0 - j}{n}} \quad (3.3\ 24)$$

其中 $A_j(y, \varphi^0)$ 是具有解析系数的 φ^0 的导数的多项式,而且数 N_3 依赖于 N.

上面我们证明了

$$A_0(y, \varphi^0) \equiv \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} L_2^{(\alpha')}(0, \gamma\hat{\eta}'')(\varphi_{y_0}^0)^{\alpha_0} \cdots (\varphi_{y_l}^0)^{\alpha_l} + \gamma \sum_{\beta \in \mu} \frac{y^\beta}{\beta!} L_{1,\beta}(0, \hat{\eta}'') \quad (3.3.25)$$

对于 $|\alpha|=1$ 的 $L^{(\alpha)}_{[\rho,N]}(W)$，我们进一步得到一个 ρ 的幂的展开式。不难看出，对于 $|\alpha'|=1$ 有

$$L^{(\alpha')}_{[\rho,N]}(W)=\frac{\partial}{\partial(D^{\alpha'}\varphi^0)}(L_{[\rho,N]}(W))\rho^{-\sigma_0}$$

$$=\rho^{\nu-\sigma_0}W\left\{\frac{\partial A_0}{\partial(D^{\alpha'}\varphi^0)}+\sum_{j=1}^{N_3}\rho^{-\frac{j}{n}}B_{j,\alpha'}(y,\varphi^0)\right\} \tag{3.3.26}$$

如果 $|\alpha''|=1$ 而 $D^{\alpha''}=-i\partial/\partial y_k$, $l+1\leqslant k\leqslant m$，则容易看出

$$L^{(\alpha'')}_{[\rho,N]}(W)=\frac{\partial}{\partial(\gamma\hat{\eta}_k)}(L_{[\rho,N]}(W))\rho^{-1}$$

$$=W\rho^{\nu-\sigma_0}\sum_{j=1}^{N_4}\rho^{-\frac{j}{n}}C_{j,\alpha''}(y,\varphi^0) \tag{3.3.27}$$

这里 $B_{j,\alpha'}$ 和 $C_{j,\alpha''}$ 是 φ^0 的导数的线性函数，系数对 y 是解析的，而且 N_4 是依赖于 N 的整数。

现在我们求 (3.3.20) 右端的项的如下形式的展开式

$$H=\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}L^{(\alpha)}_{[\rho,N]}(W)D^{\alpha}(vw)$$

$$=W\sum_{|\alpha|=2,\beta,\lambda_2>-N}\rho^{\lambda_2(\alpha',\beta)}\frac{y^{\beta}}{\beta!}a_{\alpha,\beta}D^{\alpha}(vw) \tag{3.3.28}$$

这里 $a_{\alpha,\beta}$ 是某些常数。

对于 $|\alpha|=2$，有

$$D^{\alpha}(wv)=w\left\{v\left[\left(\sum_{j=1}^{N_2}\rho^{\sigma_j}\varphi^j_{y_0}\right)^{\alpha_0}\cdots\left(\sum_{j=1}^{N_2}\rho^{\sigma_j}\varphi^j_{y_m}\right)^{\alpha_m}\right.\right.$$

$$\left.+i\sum_{j=1}^{N_2}\rho^{\sigma_j}D^{\alpha}\varphi^j\right]+D^{\alpha}v$$

$$\left.+\sum_{k,s=0}^{m}b^{\alpha}_{k,s}D_s\left(\sum_{j=1}^{N_4}\rho^{\sigma_j}\varphi^j\right)D_k v\right\}$$

其中 $b^{\alpha}_{k,s}=\text{const}$。

由此得到

$$H = Ww \sum_{|\alpha|=2,\beta,\lambda_2>-N} \rho^{\lambda_2(\alpha',\beta)} \frac{y^\beta}{\beta!} a_{\alpha,\beta}$$

$$\cdot \left[v \sum_{j,k=1}^{N_2} \rho^{\sigma_j+\sigma_k} \Theta_{kj}^\alpha + \sum_{j=1}^{N_2} \rho^{\sigma_j} \left(v\Theta_j^\alpha \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=0}^{m} h_{kj}^\alpha D_k v \right) + D^\alpha v \right] \tag{3.3.29}$$

其中 Θ_{kj}^α 依赖于 φ^k 和 φ^j 的导数，而 Θ_j^α 和 h_{kj}^α 依赖于 φ^j 的导数。我们将求 $\lambda_2(\alpha', \beta)(|\alpha|=2)$ 的估计。考虑 $p_1|\beta'| + p_2|\beta''| \geqslant 2-|\alpha'|$，如果对于某 $\hat{\eta}''$ 有 $L_{2,\beta}^{(\alpha'+\alpha'')}(0, \hat{\eta}'') \neq 0$，从关系式(3.3.23)得到

$$\begin{aligned} & v - \lambda_2(\alpha', \beta) - (2 - |\alpha' + \alpha''|(1-\sigma_0)) \\ & \geqslant \frac{(2-|\alpha'|)}{2} q(1 - p_1(1+|\hat{\beta}'|) - p_2|\hat{\beta}''|) \\ & = (2-|\alpha'|)\sigma_0 \end{aligned}$$

因为 $|\alpha' + \alpha''| = 2$，从上式推出

$$\begin{aligned} \lambda_2(\alpha', \beta) & \leqslant v - [(2-|\alpha'|)\sigma_0 + 2 - |\alpha' + \alpha''|(1-\sigma_0)] \\ & \leqslant v - 2\sigma_0 \end{aligned}$$

考虑表达式(3.3.24)—(3.3.29)，并且应用公式(3.3.20)，得到

$$L_{[\rho,N]}(u_\rho) = Ww \left\{ v\rho^v \sum_{j=0}^{N_3} A_j \rho^{-\frac{j}{n}} \right.$$

$$+ \rho^{v-\sigma_0} \left[\sum_{|\alpha'|=1} \left(\frac{\partial A_0}{\partial(D^{\alpha'}\varphi^0)} + \sum_{j=1}^{N_3} \rho^{-\frac{j}{n}} B_{j,\alpha'} \right) \right.$$

$$\cdot \left(D^{\alpha'} v + vi \sum_{j=1}^{N_1} \rho^{\sigma_j} D^{\alpha'} \varphi^j \right)$$

$$\left. + \sum_{|\alpha''|=1} \sum_{j=1}^{N_4} \rho^{-\frac{j}{n}} C_{j,\alpha''} \left(D^{\alpha''} v + vi \sum_{j=1}^{N_2} \rho^{\sigma_j} D^{\alpha''} \varphi^j \right) \right]$$

$$+ \rho^{v-2\sigma_0} \sum_{|\alpha|=2} \left[v \sum_{j,k=1}^{N_2} \rho^{\sigma_j+\sigma_k} \Theta_{kj}^\alpha + \sum_{j=1}^{N_2} \rho^{\sigma_j} \left(\Theta_j^\alpha v \right.\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{m} h_k^{\alpha} D_k v\Bigg) + D^{\sigma} v \Bigg]\Bigg(\sum_{k=0}^{N_\lambda} r_{\alpha,k}\rho^{\frac{k}{n}}\Bigg)\Bigg\} \quad (3.3.30)$$

其中 $r_{\alpha,k}$ 是与 v, φ^k 和 ρ 无关的某函数.

为了确定函数 φ^0, 我们考虑微分方程

$$A_0(y, \varphi^0) = 0 \quad (3.3.31)$$

其中 $A_0(y, \varphi^0)$ 由 (3.3.25) 确定.

由于 $\hat{\eta}''$ 和 $\hat{\beta}$ 的选取, $L_{1,\hat{\beta}}(0, \hat{\eta}'') \neq 0$, 由此推出 y 的多项式

$$b(y) = \sum_{\beta \in \mu} \frac{y^{\beta}}{\beta!} L_{1,\beta}(0, \hat{\eta}'')$$

至少有一个系数不等于 0. 因此在原点邻域内存在一点 $y^* = (y_0^*, \cdots, y_m^*)$, 使得 $y_0^* > 0$ 而且 $b(y^*) \neq 0$.

我们证明方程 (3.3.31) 关于 $\varphi^0_{y_0}$ 可解. 为此目的,考虑

$$A_0(y^*, \zeta_0, \cdots, \zeta_l) = \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} L_2^{(\alpha')}(0, \gamma\hat{\eta}'')\zeta_0^{\alpha_0}\cdots\zeta_l^{\alpha_l} + \gamma b(y^*)$$

对于方程

$$A_0(y^*, \zeta_0, 0, \cdots, 0) = a_{(2,0,\cdots,0)}(0)\zeta_0^2 + \gamma b(y^*) = 0$$

如果适当选取数 γ 的符号, 则对于 ζ_0 存在一单根 $F(y^*)$, 使得 $\operatorname{Im}F(y^*) < 0$. 因此在点 y^* 的某邻域 G_1 内和在空间 $(\zeta_1, \cdots, \zeta_l)$ 原点的一邻域内,定义了一个解析函数 $\zeta_0 = F(y, \zeta_1, \cdots, \zeta_l)$,它满足方程 $A_0(y, \zeta_0, \cdots, \zeta_l) = 0$ 并且 $I_m F(y, \zeta_1, \cdots, \zeta_l) < 0$. 由 Cauchy Ковалевская 定理, 在点 y^* 的邻域 $G_2 \subset G_1$ 内, 存在方程

$$\varphi^0_{y_0} = F(y, \varphi^0_{y_1}, \cdots, \varphi^0_{y_l}) \quad (3.3.32)$$

具有条件

$$\varphi^0|_{y_0=y_0^*} = i \sum_{k,l=1}^{m} b^{kl}(y_k - y_k^*)(y_l - y_l^*) \quad (3.3.33)$$

的一个解析解 $\varphi^0(y)$,其中 $\|b^{kl}\|$ 是实对称正定矩阵.

在点 $y = y^*$ 上将问题 (3.3.32), (3.3.33) 的解 $\varphi^0(y)$ 展开为 Taylor 级数,得到

$$\varphi^0(y) = \left[\varphi^0_{y_0}(y^*) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\varphi^0(y^*)}{\partial y_0 \partial y_j}(y_j - y_j^*)\right](y_0 - y_0^*)$$

$$+ \sum_{k,j=1}^{m} ib^{kj}(y_k - y_k^*)(y_j - y_j^*) + O(|y - y^*|^3) \tag{3.3.34}$$

由于 $\operatorname{Im}\varphi^0_{y_0}(y^*) < 0$，我们可以选取点 y^* 的一个充分小邻域 G_3，使得

$$\operatorname{Im}\varphi^0(y) \geqslant C_0(|y_0 - y_0^*| + \sum_{j=1}^{m}|y_j - y_j^*|^2) \tag{3.3.35}$$

在 $G_3^- = G_3 \cap \{y_0 \leqslant y_0^*\}$ 内成立，其中 $C_0 = \text{const} > 0$。

因此我们取上面所构造的问题 (3.3.32)，(3.3.33) 的解 $\varphi^0(y)$ 作为 (3.3.18) 中的函数 φ^0。现在令

$$\sigma_j = \sigma_0 - \frac{j}{n} = \frac{n\sigma_0 - j}{n}; \quad j = 1, \cdots, n\sigma_0 - 1 = N_3$$

在 (3.3.18) 中的函数 φ^j 可以用逐次令展开式 (3.3.30) 中含因子 $\rho^{\nu - \frac{j}{n}}$ 的所有项的和等于 0 来确定，即我们逐次定义 φ^j 作为方程

$$\sum_{|\alpha'|=1} i\left(\frac{\partial A_0}{\partial(D^{\alpha'}\varphi^0)}\right)D^{\alpha'}\varphi^j + \Phi_j(y, \varphi^0, \cdots, \varphi^{j-1}) = 0 \tag{3.3.36}$$

具有条件

$$\varphi^j|_{y_0 = y_0^*} = 0, \quad j = 1, \cdots, n\sigma_0 - 1 \tag{3.3.37}$$

的解，其中 Φ_j 是已知的解析函数。因为对于 $y = y^*$ 有 $\partial A_0/\partial D_0\varphi^0 \neq 0$，由此推得，在点 y^* 的一个充分小邻域 G_4 内，问题 (3.3.36)，(3.3.37) 的解 φ^j 存在。把用这种方法构造的函数 φ^0 和 $\varphi^j(j = 1, \cdots, n\sigma_0 - 1)$ 代入 (3.3.30)，在 G_4 内得到

$$L_{(\rho, N)}(u_\rho) = Ww\rho^{\nu - \sigma_0}\left[\sum_{j=0}^{N_4}\rho^{-\frac{j}{n}}\widetilde{Q}_j v\right.$$

$$+\sum_{|\alpha'|=1}\left(\frac{\partial A_0}{\partial(D^{\alpha'}\varphi^0)}+\sum_{j=1}^{N_7}\rho^{-\frac{j}{n}}\widetilde{B}_{j,\alpha'}\right)D^{\alpha'}v$$

$$+\sum_{|\alpha''|=1}\sum_{j=1}^{N_8}\rho^{\frac{j}{n}}\widetilde{C}_{j,\alpha''}D^{\alpha''}v+\rho^{\sigma_0}$$

$$\times\sum_{|\alpha|=2}\sum_{j=0}^{N_5}\rho^{-\frac{j}{n}}r_{\alpha,j}D^{\alpha}v\Bigg] \tag{3.3.38}$$

其中 $\widetilde{Q}_j$, $\widetilde{B}_{j,\alpha'}$ 和 $\widetilde{C}_{j,\alpha''}$ 是已知函数，而 N_6, N_7 和 N_8 是依赖于N的确定数.

我们将求形式为

$$v=\sum_{j=0}^{N_1}\rho^{-\frac{j}{n}}v^j(y) \tag{3.3.39}$$

的函数 v，并且将它代人方程 (3.3.38). 令 (3.3.38)右端包含因子 $\rho^{\nu-\sigma_0-j/n}(j=0,1,\cdots,N_1)$ 诸项的和等于 0，我们得到逐次确定函数 v^j 的形式为

$$\sum_{|\alpha'|=1}\left(\frac{\partial A_0}{\partial(D^{\alpha'}\varphi^0)}\right)D^{\alpha'}v^j+\widetilde{Q}_0v^j+\phi_j(y,v^0,\cdots,v^{j-1})=0 \tag{3.3.40}$$

的方程，其中 ϕ_j 是已知的解析函数. 我们取方程 (3.3.40) 具有初始条件

$$v^0|_{y_0=y_0^*}=1 \tag{3.3.41}$$

$$v^j|_{y_0=y_0^*}=0,j=1,\cdots,N_1 \tag{3.3.42}$$

的解作为展开式(3.3.39)中的 $v^j(y)$，显然在点 y^* 的某充分小邻域内这种解存在. 在点 y^* 的某邻域 $G\subset\Omega_1$ 内，用这样构造的函数 u_ρ，有

$$L_{\rho,N]}(u_\rho)=Ww Q(y,\rho) \tag{3.3.43}$$

其中 $|Q(y,\rho)|\leqslant C_1\rho^{\nu-\sigma_0-(N_1+1)/n}$，而且常数 C_1 与ρ 无关.

令函数 $\varphi(y)\in C_0^\infty(G)$，在$G$内 $\varphi\geqslant 0$，而且在点 y^* 的某邻域 G_0 内 $\varphi\equiv 1$. 我们记 $G^-=G\cap\{y_0\leqslant y_0^*\}$ 而 $G_0^-=G_0\cap\{y_0\leqslant y_0^*\}$. 显然存在一个常数 $C_2>0$，使得对于集合 $G^-\backslash G_0^-$ 的点，有

$$|y_0 - y_0^*| + \sum_{j=1}^{m} |y_j - y_j^*|^2 > C_2 \qquad (3.3.44)$$

考虑算子 L_r 的象征表达式 (3.3.15)，方程(3.3.43)和估计(3.3.35)，(3.3.44)，对适当大的 ρ，我们得到

$$\sup_{G^-} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha L(\varphi u_\rho)| \leqslant C_3 \sup_{G^-} |Ww| \left(\rho^{\nu - \sigma_0 - \frac{N_1+1}{n} + k} + \rho^{-N+k+2}\right) + C\rho^M \exp\left(-\frac{1}{2} C_0 C_2 \rho^{\sigma_0}\right)$$

其中 C_3, C_4 和 M 都是与 ρ 无关的常数。

我们选取 N 和 N_1，使得 $-N + k + 2 \leqslant -k\delta - 1$，并且 $\nu - \sigma_0 - (N_1 + 1)/n + k \leqslant -k\delta - 1$。则对于充分大的 ρ，有

$$\rho^{k\delta} \sup_{G^-} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha L(\varphi u_\rho)| \leqslant C_5 \rho^{-1} (\sup_{G^-} |Ww| + 1)$$

其中常数 C_5 与 ρ 无关。

因为在 G_3^- 内对于 φ^0 估计 (3.3.35) 成立，并且对于 $y_0 = y_0^*$ 和 $j \geqslant 1$，$\varphi^j = 0$ 推得对于充分大的 ρ，估计

$$\sup_{G^-} |Ww| = \left| \exp\left(i \sum_{j=0}^{N_2} \varphi^j \rho^{\sigma_j} \right) \right| \leqslant 1$$

成立。我们选取 $\rho = \rho_0$ 适当大，并且有

$$C\rho_0^{k\delta} \sup_{G^-} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha L(\varphi u_{\rho_0})| < \frac{1}{2} \qquad (3.3.45)$$

其中 C 是在不等式 (3.3.14) 中(对于某一含 G 的紧集 K_1) 的常数。因为 $x_0 \geqslant h$ 而且 $y_0^* > 0$，在给定初给条件的平面 $x_0 = h$ 的邻域内，我们可以假设 $\varphi u_\rho = 0$。因此有

$$\varphi u_{\rho_0}|_{x_0=h} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}(\varphi u_{\rho_0})|_{x_0=h} = 0$$

我们参虑函数 $f(y)$，在 G 内等于 $L(\varphi u_{\rho_0})$，而且 $f(y) \in C_0^\infty(G)$，而

$$C\rho_0^{k\delta} \sup_{G} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha f| \leqslant \frac{1}{2}$$

因为根据我们的关于 Cauchy 问题 (3.3.1)，(3.3.2) 在 Ω 内是

适定的假设，由此推出在 Ω 内对于问题

$$L(u')=f,\quad u'|_{x_0=h}=\left.\frac{\partial u'}{\partial x_0}\right|_{x_0=h}=0$$

存在一个解 u'，而且当 $y_0\leqslant y_0^*$ 时 $u'=\varphi u_{p_0}$.

由 $|\varphi u_p(y^*)|=1$ 的构造，从而 $\sup_{\Omega_1}|u'|\geqslant 1$. 因此我们得到：对于 u'，估计(3.3.14)不满足，这与 Cauchy 问题(3.3.1)，(3.3.2)是适定的并且条件(3.3.8)，(3.3.9)不满足的假设矛盾.

定理证毕.

比较定理 3.3.1 中所得到的方程(3.3.1)的 Cauchy 问题适定性的必要条件与在 §2 中所得到的充分条件是很有趣的.

令

$$L(u)\equiv u_{x_0x_0}-x_0^{2k}u_{x_1x_1}+ax_0^su_{x_1}=0 \qquad (3.3.46)$$

其中 $a=\text{const}$，而 k 和 s 是非负整数.

根据定理 3.2.1，如果 $s\geqslant k-1$，则在区域 $\Omega=\{0\leqslant x_0<T,-\infty<x_1<+\infty\}$ 内，在 $x_0=0$ 上给定初始条件的 Cauchy 问题是适定的. 从定理 3.3.1 我们得到：条件 $s\geqslant k-1$ 也是 Cauchy 问题适定性的必要条件.

令

$$L(u)\equiv u_{x_0x_0}-x_1^{2k}u_{x_1x_1}+ax_1^su_{x_1}=0 \qquad (3.3.47)$$

其中 $a=\text{const}$，而 k 和 s 是非负整数. 根据定理 3.2.1，在区域

$$\Omega\{0<x_0<T,\ -\infty<x_1<+\infty\}$$

内，如果 $s\geqslant k$，方程(3.3.47)在 $x_0=0$ 上给初始条件的 Cauchy 问题是适定的. 定理 3.3.1 表明这个条件也是必要的.

对于任意阶方程，可以证明一个类似于定理 3.3.1 的定理.

参考文献

[1] A. D. Aleksandrov, *Investigations on the maximum principle*. I. Izv. Vysš. Učebn. Zaved Matematika **1958**, no. 5(6) 126—157. (Russian) MR 24 # A3400a.

[2] ——————, *Investigations on the maximum principle*. II, Izv. Vysš. Učebn Zaved Matematika **1959**, no. 3 (10) 3—12. (Russian) MR **24** # A3400b.

[3] ——————, *Investigations on the maximum principle*. III, Izv. Vysš Učebn. Zaved. Matematika **1959**, no. 3 (12), 16—32, (Russian) MR **24** # A3400c.

[4] ——————, *Investigations on the maximum principle*. IV. Izv. Vysš Učebn. Zaved. Matematika **1960**, no. 3 (16) 3—15. (Russian) MR **24** # A3400d

[5] ——————, *Investigations on the maximum principle*. V. Izv. Vysš. Učeben. Zaved. Matematika **1960**, no. 5 (18) 16—26 (Russian) MR **24** # A3400e

[6] M. S. Baouendi, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérant au bord*, C. R Acad Sci. Paris Sér. A—B **262** (1966), A3337—A340 MR **33** # 2950

[7] ——————, *Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Bull Soc. Math France 95 (1967), 45—87. MR 37 # 4398

[8] M S. Baouendi and P. Grisvard, *Sur une équation d'évolution changeant de type*, J. Functional Analysis **2** (1968), 352—367. MR **40** # 6034

[9] ——————, *Sur une équation d'évolution changeant de type*, C. R Acad. Sci. Paris Sér. A—B **265** (1967), A556—558. MR **36** 4158.

[10] I. S. Berezin, *On Cauchy's problem for linear equations of the second order with initial conditions on a parabolic line*, Mat. Sb. **24** (66) (1949), 301—320;English transl, Amer. Math. Soc. Transl. (1) **4** (1962), 415—439. MR **11**, **112**; **13**, 559.

[11] S. N. Bernštein, *Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard*, C. R. Acad. Sci. Paris **151** (1910), 635—638.

[12] L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, Surveys in Appl. Math,, vol. 3, Wiley, New York; Chapman and Hall, London, 1958, MR **20** # 2960.

[13] L. Bers, F. John and M. Schechter, *Partial differential equations*, Lectures in Appl. Math., vol. 3, Interscience New York, 1964. MR **29** # 346.

[14] P. Bolley and J. Camus, *Etudes de la régularité de certains problèmes elliptiques dégénérés dans des ouverts non réguliers, par la méthode de réflexion*, C. R Acad. Sci. Paris Sér. A—B 268 (1969), A1462—

A1464 MR **39** # 7275.

[15] J M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann Inst Fourier (Grenoble) **19** (1969), fasc. 1, 277—304 MR **41** # 7486.

[16] J.-M. Bony, *Problème de Dirichlet et Harnack pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre*, C. R. Acad Sci. Paris Sér. A—B **266** (1968), A830—A833. MR **37** # 6579

[17] ——————, *Sur la propagation des maximums et l'unicité du problème de Cauchy pour les opèrateurs elliptiques dégénérés du second ordre*, C. R. Acad Sci Paris Sér. A—B **266**(1968), A763—A765 MR **37** # 6578

[18] Chi Min-yu, *The Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with initial data on a line of parabolic degeneracy*, Acta Math Sinica **8** (1958), 521—530=Chinese Math. Acta **9** (1967), 246—265. MR **21** # 5815.

[19] R. Courant, *Methods of mathematical physics*. Vol 2 *Partial differential equations* Insterscuérnce, New York, 1962, MR **25** # 4216

[20] M. Derridj, *Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques à coefficients analytiques*, Séminaire Goulaouie-Schwartz 1970/71, Exposé no. 12, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, Paris

[21] Ju V Egorov, *Hypoelliptic pseudodifferential operators*, Dokl Akad Nauk SSSR 168 (1966), 1242—1244=Soviet Math Dokl 7 (1966), 808—810. MR **34** # 3078.

[22] ——————, *On subelliptic pseudoddifferential operators*, Dokl. Akad Nauk SSSR 188 (1969) 20 22=Soviet Math Dokl **10** (1969), 1056—1059. MR 41 # 630.

[23] ——————, *The canonical transformations of pseudodifferential operators*, Uspehi Mat. Nauk **24** (1969) no. 5 (149), 235—236. (Russian) MR **42** # 657.

[24] Ju V. Egorov and V. A. Kondrat'ev, *The oblique derivative problem*, Mat. Sb. **78** (**120**) (1969), 148—176 - Math. USSR Sb. **7** (1969), 139—166. MR **38** # 6230.

[25] L. P. Eisenhart, *Continuous groups of transformations*, Princeton Univ Press, Princeton, N. J., 1933; reprint, Dover, New York, 1961. MR **23** # A1328.

[26] G. M. Fateeva, *The Cauchy problem and boundary value problem for linear and quasilinear degenerate second-order hyperbolic equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **172** (1967), 1278—1281=Soviet Math Dokl. **8** (1967), 281—284. MR **35** # 569

[27] ——————, *Boundary value problems for degenerate quasilinear parabolic equations*, Mat Sb **76** (118) (1968), 537 565=Math USSR Sb. **5** (1968), 509—532. MR **37** # 4419

[28] V S Fedil. *Estimates in $H_{(s)}$ norms and hypoellipticity*, Dokl Akad. Nauk SSSR **193** (1970), 301—303=Soviet Math Dokl. **11** (1970),

940—942. MR 12 # 6419.

[29] G Fichera, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine*, Atti Accad, Naz. Lincei . Mem. CI. Sci Fis. Mat Nat. Sez. 1 (8) 5 (1956), 1—30 MR 19 658; 1432.

[30] ——————, "On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order," in *Boundary problems Differential equations*, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1960, pp. 97—120. MR 22 # 2789.

[31] J. N. Franklin and E R. Rodemich, *Numerical analysis of an elliptic-parabolic partial differential equation*, SIAM J. Numer Anal. 5 (1968), 680—716. MR 39 # 6522.

[32] M I. Freĭdlin, *Markov processes and differential equations*, Theory of Probability. Mathematical Statistics. Theoretical Cybernetics 1966, Akad. Nauk SSSR Inst. Naučn Ioformacii, Moscow, 1967, pp 7—58—Progress in Math 3 (1969), 1 55. MR 38 # 3618.

[33] M. I. Freĭdlin, *The first boundary value problem for degenerating elliptic differential equations*, Uspehi Mat. Nauk 15 (1960), no. 2 (92), 204—206. (Russian)

[34] ——————, *On the formulation of boundary value problems for degenerating elliptic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 170 (1966), 282 285=Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 1204—1207 MR 35 # 1908.

[35] ——————, *The stabilization of the solutions of certain parabolic equations and systems* Mat Zametki 3 (1968), 85—92=Math Notes 3 (1968), 50—54 MR 36 # 5536

[36] ——————, *Quasilinear parabolic equations, and measures on a function space*, Funkcional Anal. i Priložen. 1 (1967), no. 3, 74—82—Functional Anal Appl. 1 (1967), 234 240. MR 37 # 584.

[37] A. Friedman *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Englewood Gliffs, N J., 1964 MR 31 # 6062.

[38] K. O. Friedrichs, *Pseudo-differential operators. An introduction*, Courant Inst. Math Sci New York University, 1970. MR 44 # 859

[39] L Gårding, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scand. 1 (1953), 55 72 MR 16, 366

[40] I M. Gel'fand and G E. Šilov, *Generalized functions*. Vol. 1· *Operations on them*, Fizmatgiz, Moscow, 1958: English transl., Academic Press, New York, 1964. MR 20 # 4182, 29 # 3869

[41] ——————, *Generalized functions*. Vol. 2: *Spaces of fundamental functions*, Fizmatgiz, Moscow, 1958; English transl., Academic Press, New York, 1964. MR 21 # 5142a; 37 # 5693.

[42] S. Gellerstedt, *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte*, Ark. Mat. Astr. Fys. 25A (1937)

[43] T. G. Genčev, *Ultraparabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 151 (1963), 265—268—Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 979—982. MR 27 # 1715.

[44] V. P Gluško, *Coerciveness in L_2 of general boundary value problems*

for a degenerate second order elliptic equation, Funkcional. Anal. i Priložen. **2** (1968), no. 3, 87—88 = Functional Anal Appl **2** (1968), no. 3, 261—263. MR **38** # 3585.

[45] B. Hanouzet, *Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxiéme ordre,* C. R Acad. Sci. Paris Sér. A—B **268** (1969), A1177—A1179. MR **39** # 3147.

[46] G Hellwig, *Anfangs-und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichunngen von wechselnaem Typus auf den Rändrn,* Math. Z. **58** (1953), 337—357 MR **15**, 130.

[47] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie,* 7th ed., Teubener, Leipzig, 1930.

[48] ——————, *Über die Darstellung definiter Formen als Summen von Formenquadraten,* Math Ann. **32** (1888), 342—350.

[49] E Hopf, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus,* S. B. Preuss. Akad. Wiss. **19** (1927), 147—152.

[50] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators,* Acta Math. **94** (1955), 161—248. MR **17**, 853.

[51] ——————, *On interior regularity of the solutions of partial differential equations,* Comm Pure Appl. Math. **11** (1958), 197—218. MR **21** # 5064.

[52] L. Hörmander, *Hypoelliptic differential operators* Ann. Inst Fourier (Grenoble) **11** (1961), 477—492 MR **23** # A3368.

[53] ——————, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations,* Proc. Sympos Pure Math, vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967, pp. 138—183.

[54] ——————, *Pseudo-differential operators,* Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 501 517 MR **31** # 4970.

[55] ——————, *Hypoelliptic second order differential equations,* Acta Math. **119** (1967), 147—171. MR **36** # 5526.

[56] ——————, *Linear partial differential operators,* Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 116. Academic Press, New York, Springer--Verlag, Berlin, 1963. MR **28** # 4221

[57] A. M. Il'in, *On a class of ultraparabolic equations,* Dokl Akad Nauk SSSR **159** (1964), 1214—1217 = Soviet Math. Dokl **5** (1964), 1673—1676. MR **30** # 1315.

[58] ——————, *On Dirichlet's problem for an equation of elliptic type degenerating on some set of interior points of a region,* Dokl. Akad Nauk SSSR **102** (1955), 9—12 (Russian) MR **17**, 269

[59] ——————, *Degenerate elliptic and parabolic equations,* Mat. Sb **50** (92) (1960), 443—498. (Russian) MR **22** # 2788.

[60] ——————, *Degenerating elliptic and parabolic equations,* Naučn. Dokl. Vysš. Školy. Fiz-Mat Nauki **1958**, no. 2, 48—54 (Russian) RŽ Mat. **1960** # 1669.

[61] A. M Il'in, A. S Kalašnikov and O. A. Oleĭnik, *Second-order linear equations of parabolic type,* Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), no. 3 (105),

3—146=Russian Math. Surveys **17** (1962), no. 3, 1—143. MR **25** # 2328.

[62] V Ja. Ivrií, *The Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic equations,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **197** (1971), 517—519=Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 483—486.

[63] M V Keldyš, *On certain cases of degeneration of equations of elliptic type on the boundary of a domain,* Dokl. Akad Nauk SSSR **77** (1951), 181 -183, English transl, Amer. Math. Soc. Transl. (2) (to appear). MR**13**, **41**

[64] J J. Kohn and L. Nirenberg, *Degenerate elliptic-parabolic equations of second order* Comm Pure Appl Math. **20** (1967), 797—872. MR **38** # 2437.

[65] ————, *An algebra of pseudodifferential operators,* Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 269—305. MR **31** # 636.

[66] J. J. Kohn, *Pseudo-differential operators and non-elliptic problems,* Pseudo-Differential Operators (C. I. M. E., Streza, 1968), Edizioni Cremonese, Rome. 1969, pp. 157 -165 MR **41** # 3972.

[67] A N. Kolmogorov, *Zufällige Bewegungen,* Ann. of Math. **35** (1934), 116—117.

[68] V A. Kondrat'ev, *Boundary value problems for parabolic equations in closed regions,* Trudy Moskov. Mat. Obšc **15** (1966), 400—451=Trans. Moscow Math. Soc. **1966**, 450—504. MR **35** # 579.

[69] S. N. Kružkov, *Boundary value problems for second ordre elliptic equations,* Mat. Sb **77** (119), (1968), 299—334=Math. USSR Sb. **6** (1968), 275—308. MR **39** # 1794.

[70] L. D. Kudrjavcev, *On the solution by the variational method of elliptic equations which degenerate on the boundary of the region,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **108** (1956), 16—19. (Russian) MR **19** 283.

[71] L. D. Kudrjavcev, *Direct and inverse imbedding theorems Applications to the solution of elliptic equations by variational methods.* Trudy Mat. Inst. Steklov. **55** (1959); English Transl., Transl. Math. Monographs, vol. 00, Amer. Math Soc Providence, R. I. (to appear). MR **33** # 7838.

[72] A Lax, *On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics,* Comm. Pure Appl. Math. **9** (1956), 135—169. MR **18**, 397.

[73] P. D Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems,* Duke Math. J. **24** (1957), 627—546. MR **20** # 4096.

[74] E. E. Levi, *Opere*, A cura dell'unione Matematica Italiane e col con tributo del Consiglio Nazional delle Ricerche, 2 vols, Edizioni Cremonese, Rome. 1959, 1960, papers 15—18. MR **23** # A790.

[75] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunud; Gauthier-Villars, Paris, 1969. MR **41** # 4326.

[76] B. Malgrange, *Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques,* Bull. Soc. Math France **85** (1957), 283—306 MR **21** 5063.

[77] V. G. Maz'ja, *The degenerate problem with oblique derivative,* Uspehi Mat. Nauk **25** (1970), no. **2** (152), 275—276. (Russian) MR **41** # 4031.

[78] V. G. Maz'ja and B. P. Panejah, *Degenerate elliptic pseudodifferential operators on a smooth manifold without boundary,* Funkcional. Anal. i Priložen. **3** (1969), no. 2, 91—92=Functional Anal. Appl. **3** (1969), 159—160. MR **40** # 3372.

[79] V P. Mihailov, *An existence and uniqueness theorem for the solution of a certain boundary value problem for a parabolic equation in a domain with singular points on the boundary,* Trudy Mat Inst. Steklov. **91** (1967), 47—58=Proc. Steklov Inst. Math. **91** (1967), 47—60 MR **36** # 6804.

[80] S. G. Mihlin, *Degenerate elliptic equations,* Vestnik Leningrad. Univ. **9** (1954), no 8, 19—48. (Russian) MR **17**, 493

[81] C Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft 2, Springer-Verlag, Berlin, 1955; Engish transl., Springer-Verlag, Berlin, 1970. MR **19**, 421.

[82] S Mizohata and Y Ohya, *Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques*, Publ. Res. Inst Math. Sci. Ser. A 4 (1968), 511—526 MR **43** # 2349b.

[83] A. B. Nersesjan, *The Cauchy problem for a second-order hyperbolic equation degenerating on the initial hyperplane*, Dokl. Akad Nauk SSSR **181** (1968), 798—801=Soviet Math. Dokl **9** (1968), 934—938. MR **38** # 4814

[84] S. M. Nikol'skiĭ, *Approximation of functions of several variables, and imbedding theorems*, "Nauka", Moscow, 1969, English transl., Springer Verlag, New York (to appear)

[85] L. Nirenberg, *A strong maximum princile for parabolic equations*, Comm Pure. Appl. Math **6** (1953), 167—177. MR **14**, 1089 **16**, 1336

[86] O. A. Oleĭnik, *Alcuni risultati sulle equazioni lineari e quasi lineari ellittico-paraboliche a derivate parziali del secondo ordine*. Atti Accad Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **40** (1966), 775—784. MR **37** # 5542.

[87] O. A. Oleĭnik, *A boundary value problem for linear elliptic-parabolic equations*, Lecture Ser., no. 46, University of Maryland Inst. Fluid Dynamics and Appl Math., 1965.

[88] ————, *The Cauchy problem and the boundary value problem for second-order hyperbolic equations degenerating in a domain and on its boundary*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **169** (1966), 525—528=Soviet Math. Dokl 7(1966), 969—973. MR **34** # 3120

[89] ————, *On second order hyperbolic equations degenerating in the interior of a region and on its boundary,* Uspehi Mat Nauk **24** (1969), no. 2(146), 229—230. (Russian) MR **40** # 548.

[90] ————, *Mathematical problems of boundary layer theory*, Uspehi Mat. Nauk **23** (1968), no. 3(141), 3—65=Russian Math Surveys **23**

(1968), no. 3, 1—66. MR 37 # 4428.

[91] ———————, *A problem of Fichera*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **157** (1964), 1297—1300=Soviet Math. Dokl. **5**(1964), 1129—1133. MR **30** # 1293.

[92] ———————, *On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 163(1965), 577—580 =Soviet Math. Dokl. **6**(1965), 972—975. MR 34 # 486.

[93] ———————, *Linear equations of second order with nonnegative characteristic form*, Mat. Sb. **69** (**111**) (1966), 111—140; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) **65**(1967), 167—199. MR **33** # 1603.

[94] ———————, *On equations of elliptic type degenerating on the boundary of a region*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **87**(1952), 885—888. (Russian) MR **15**, 366.

[95] ———————, *On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type*, Mat. Sb. **30**(**72**) (1952), 695—702. (Russian) MR **14**, 280.

[96] ———————, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, Uspehi Mat. Nauk **12**(1957), no. 3(75), 3—73; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) **26**(1963), 95—172. MR **20** # 1055; **27** # 1721.

[97] O. A. Oleĭnik and T. D. Ventcel, *The first boundary problem and the Cauchy problem for quasi-linear equations of parabolic type*, Mat. Sb. **41**(83), (1957), 105—128. (Russian) MR **19**, 149.

[98] O. A. Oleĭnik and E. V. Radkevič, *On the local smoothness of weak solutions and hypoellipticity of differential equations of second order*, Uspehi Mat. Nauk **26**(1971), no. 2 (158), 265—281=Russian Math. Surveys **26**(1971), no. 2, 139—156.

[99] O. A. Oleĭnik, *On the equations of unsteady filtration*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **113** (1957), 1210—1213. (Russian) MR **20** # 1056.

[100] I. G. Petrovskiĭ, *Lectures on partial differential equations*, 3rd aug. ed., Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transl., Iliffe, London, Distributed by Saunders, Philadelphia, Pa., 1967. MR **25** # 2308; **35** # 1906.

[101] ———————, *Lectures on the theory of ordinary differential equations*, 5th ed., "Nauka", Moscow, 1964; English transl., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966. MR **30** # 5055; **33** # 1518.

[102] R. S. Phillips and L. Sarason, *Elliptic-parabolic equations of the second order*, J. Math. Mech. **17** (1967/68), 891—917. MR **36** # 2942.

[103] R. S. Phillips and L. Sarason, *Singular symmetric positive first order differential operators*, J. Math. Mech. **15**(1966), 233—271. MR 32 # 4357.

[104] M. Picone, *Some forgotten almost sixty years old Lincean notes on the theory of second order linear partial differential equations of the elliptic-parabolic type*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1968).

[105] ———————, *Teoremi di unicità nei problemi dei valori al contorno*

per le equazioni ellittiche e paraboliche, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **22**(1913), No. **2**, 275—282.

[106] M. H. Protter, *The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line*, Canad. J. Math. **6**(1954), 542—553. MR **16**, 255.

[107] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967. MR **36** # 2935.

[108] C. Pucci, *Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico*. I, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **23**(1957), 370—375. MR **21** # 6467.

[109] ————, *Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico*. II, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat, (8) **24**(1958), 3—6. MR **21** # 6467.

[110] E. V. Radkevič, *The second boundary value problem for a second order equation with non-negative characteristic form*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. 22(1967), no. 4, 3—11. (Russian) MR 37 # 5531.

[111] ————, *A Schauder type estimate for a certain class of pseudodifferential operators*, Uspehi Mat. Nauk **24**(1969), no. 1(145), 199—200. (Russian) MR **40** # 525.

[112] ————, *On a theorem of L. Hörmander*, Uspehi Mat. Nauk **24** (1969), no. 2(146), 233—234. (Russian) MR **39** # 7286.

[113] ————, *A priori estimates and hypoelliptic operators with multiple characteristics*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **187** (1969), 274—277= Soviet Math. Dokl. **10**(1969), 849—852. MR **40** # 4590.

[114] ————, *Hypoelliptic operators with multiple characteristics*, Mat. Sb. 79(**121**) (1969), 193—216=Math. USSR Sb. **8**(1969), 181—205. MR 41 # 5763.

[115] P. K. Raševskiĭ, *On the joinability of any two points of a completely nonholonomic space by an admissible line*, Uč. Zap. Moskov. Gos. Ped. Inst. im. Libknehta Ser. Fiz.-Mat. **2**(1938), 83—94. (Russian) Fiz.-Mat. RŽ **1**(1939), # 2719.

[116] V. M. Petkov, *Necessary conditions for correctness of the Cauchy problem for hyperbolic systems with multiple characteristics*, Uspehi Mat. Nauk **27**(1972), no. 4(166), 221—222. (Russian)

[117] F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Lesons d'analyse fonctionnelle*, Akad. Kiadó, Budapest, 1953; English transl., *Functional analysis*, Ungar, New York, 1955. MR **15**, 132; **17**, 175.

[118] J. Schauder, *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z. 38(1934), 257—282.

[119] M. Schechter, *On the Dirichlet problem for second order elliptic equations with coefficients singular at the boundary*, Comm. Pure Appl. Math. **13**(1960), 321—328. MR **22** # 3872.

[120] L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Tomes I, II, Actualités Sci. Indust., nos. 1091, 1122, Hermann, Paris, 1950, 1951. MR **12**, 31; 833.

[121] ——————, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961. MR **26** # 919.

[122] G. E. Šilov, *Local properties of solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Uspehi Mat. Nauk **14** (1959), no. 5 (89), 3—44; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 42(1964), 129—173. MR **22** # 9708.

[123] M. M. Smirnov, *Degenerating elliptic and hyperbolic equations*, "Nauka", Moscow, 1966. (Russian) MR **36** # 1850.

[124] G. N. Smirnova, *Linear parabolic equations which degenerate on the boundary of the region*, Sibirsk. Mat. Ž. 4(1963), 343—358. (Russian) MR **26** # 5299.

[125] S. L. Sobolev, *Applications of functional analysis in mathematical physics*, Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, 1950; English transl., Transl. Math. Monographs, vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963. MR **14**, 565; **29** # 2624.

[126] ——————, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Mat. Sb. **1**(43) (1936), 39—72.

[127] G. Strang and H. Flaschka, *The correctness of the Cauchy problem*, Advances in Math. **6**(1971), 347—379.

[128] K. Suzuki, *The first boundary value problem and the first eigenvalue problem for the elliptic equations degenerate on the boundary*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A 3(1967/68), 299—335. MR **38** # 412.

[129] ——————, *The first boundary value and eigenvalue problems for degenerate elliptic equations*. I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A 4 (1968/69), 179—200. MR **40** # 544.

[130] F. Trèves, *Opérateurs differentiels hypoelliptiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **9**(1959), 1—73. MR **22** # 4886.

[131] F. Tricomi, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto*, Rend. Reale Acczd. Lincei. (5) **14**(1923), 134—247.

[132] M. I. Višik, *On the first boundary problem for elliptic equations degenerating on the boundary of a region*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **93**(1953), 9—12. (Russian) MR **15**, 798.

[133] ——————, *Boundary-value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of a region*, Mat. Sb. **35**(77) (1954). 513—568; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 35 (1964), 15—78. MR **16**, 927.

[134] M. I. Višik and V. V. Grušin, *On a class of degenerate elliptic equations*, Mat. Sb. 79(**121**) (1969), 3—36 = Math. USSR Sb. **8**(1969), 1—32. MR **40** # 1706.

[135] ——————, *Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain*, Mat. Sb. **80**(**122**) (1969), 455—491 =

Math [illegible] Sb. 9([illegible]—454. MR 41 # 2212.

[136] ————, *Elliptic pseudodifferential operators on a closed manifold which degenerate on a submanifold*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 189(1969). 16—19=Soviet Math. Dokl. 10(1969), 1316—1319.

[137] M. I. Višik and G. I. Eskin, *Convolution equations in a bounded region*, Uspehi Mat. Nauk 20(1965), no. 3(123), 89—152=Russian Math. Surveys 20(1965), no. 3, 85—151. MR 32 # 2741.

[138] L. G. Volevič, *Hypoelliptic equations in convolutions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 168(1966), 1232—1235=Soviet Math. Dokl. 7(1966), 797—800 MR 34 # 3077.

[139] L. G. Volevič and B. P. Panejah, *Some spaces of generalized functions and embedding theorems*, Uspehi Mat. Nauk 20(1965), no. 1(121), 3—74=Russian Math. Surveys 20(1965), no. 1, 1—73. MR 30 # 5160.

[140] A. I. Vol'pert and S. I. Hudjaev, *Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear degenerate parabolic equations*, Mat. Sb. 78 (120) (1969), 374—396=Math. USSR Sb. 7(1969), 365—387. MR 41 # 8828.

[141] N. D. Vvedenskaja, *On a boundary problem for equations of elliptic type degenerating on the boundary of a region*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 91(1953), 711—714. (Russian) MR 15, 711.

[142] M. Weber, *The fundamental solution of a degenerate partial differential equation of parabolic type*, Trans. Amer. Math. Soc. 71(1951), 24—37. MR 13, 41.

[143] A. Weinstein *Generalized axially symmetric potential theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 59(1953), 20—38. MR 14, 749.

[144] K. Yosida, *Functional analysis*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 123, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin, 1965. MR 31 # 5054.

[145] E. C. Zachmanoglou, *Propagation of zeros and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 38(1970), 178—188. MR 41 # 5769.

[146] T. Nagano, *Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan 18(1966), 398—404. MR 33 # 8005.

[147] J. J. Kohn and L. Nirenberg, *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. 18(1965), 443—492. MR 31 # 6041.

[148] O. A. Oleĭnik and E. V. Radkevič, *On the analyticity of solutions of linear partial differential equations*, Mat. Sb. 90 (132) (1973), 592—606=Math. USSR Sb. 19(1973) (to appear).

[149] V. M. Petkov, *Necessary conditions for correctness of the Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 206 (1972), 287—290=Soviet Math. Dokl. 13(1972), 1218—1219.